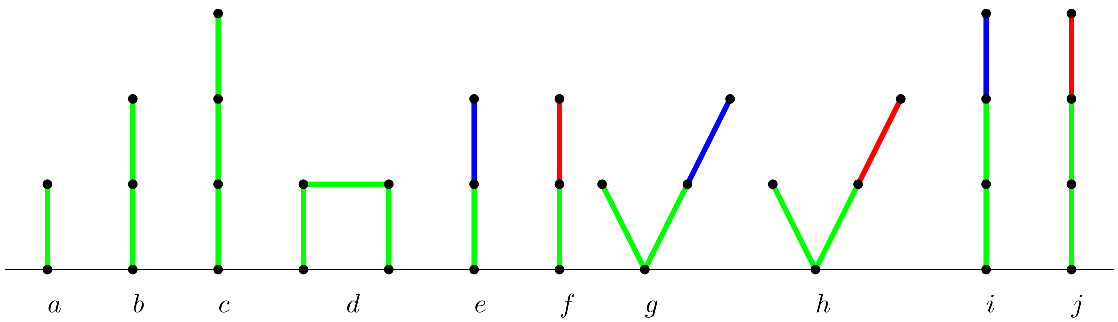
Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 4. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(4.1) Popíšeme pravidla hry *Hackenbush*. Je dán graf s hranami až tří barev, modré, červené a zelené. Alespoň jeden vrchol grafu leží „na zemi“, kterou znázorňujeme tenkou vodorovnou čarou. Levý hráč ve svém tahu smaže modrou nebo zelenou hranu, pokud se tímto odpojila nějaká část grafu od země, je tato část celá smazána. Pravý hráč maže červené nebo zelené hrany (a také odstraňuje odpojené části). Pro následující pozice Hackenbushe popište a pochopitelně odůvodněte částečné uspořádání relací $\leq$. Nakreslete jejich Hasseův diagram.



3 body

(4.2) Ukažte, že $\boxed{n} = \{\boxed{n-1}\mid\}$ a $\boxed{-n} = \{\mid\boxed{-n+1}\}$ pro celé $n \geq 1$. *1 bod*

(4.3) Dokažte následující tvrzení (dejte si při tom pozor na to, kdy se pracuje s čísly a kdy s číselnými hrami): Nechť $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Potom

(i) $\boxed{a} + \boxed{b} + \boxed{c} \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c \geq 0$ (a symetricky též pro opačnou relaci $\leq$), *2 body*

(ii) $\boxed{a} + \boxed{b} = \boxed{c} \Leftrightarrow a + b = c$ a také $\boxed{a} \geq \boxed{b} \Leftrightarrow a \geq b$. *1 bod*

(4.4) Najděte kanonický tvar součtů $\{0|*\} + *$, $\{*|0\} + *$ a $\{0|*\} + \{*|0\}$. *2 body*

(4.5) Mějme libovolnou pozici H v Hackenbushi, která obsahuje n modrých hran a žádné další. Dokažte, že $H = \boxed{n}$. *2 body*