

## Úkoly z diskrétní matematiky, 1. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

- (1.1) Určete součet řady

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1),$$

neboli součet prvních  $n$  lichých přirozených čísel. Nezapomeňte podrobně zdůvodnit (resp. dokázat), jak jste došli k výsledku. *2 body*

- (1.2) Nechtě  $X$  a  $Y$  jsou dvě množiny (úplně libovolné). Poctivě formálně dokažte, že

$$X = Y \Leftrightarrow 2^X = 2^Y.$$

Výrazem  $2^X$  rozumíme množinu všech podmnožin množiny  $X$ . *3 body*

- (1.3) Máte navrhnout sadu závaží na rovnoramenné váhy. Na levou misku se položí předmět s celočíselnou vahou od 1 do  $n$ , na pravou misku závaží, misky se musí vyrovnat. Na cvičení jsme si zdůvodnili, že jako závaží dobře poslouží mocniny dvojky. Určete přesný vzorec v závislosti na  $n$ , kolik minimálně těchto závažíček potřebujeme k odvážení předmětů. Dále dokažte, že nemůže existovat co do počtu menší sada, která by odvážila všechny předměty, a to ani když povolíme jiné hodnoty, než mocniny 2. *3 body*