Úkoly z diskrétní matematiky, 10. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(10.1) Dokažte, že úplný bipartitní graf $K_{n,m}$ je rovinný právě tehdy, když

$$\min\{n, m\} \leq 2.$$

3 body

(10.2) Dokažte, že barevnost rovinných grafů bez trojúhelníku je 4, a to bez pomoci věty o čtyřech barvách. Hint: dokažte, že každý takový graf je 3-degenerovaný. *6 bodů*

(10.3) Nechť G je graf. Dokažte následující vztah:

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|,$$

kde $\chi(G)$ značí chromatické číslo a $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny v G. *5 bodů*

(10.4) Precizně dokažte, že graf je rovinný, právě když každé jeho dělení je rovinné. *2 body*

(10.5) Kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{2,n}$? *4 body*

(10.6) Nechť G je souvislý graf. Dokažte, že pro každou hranu $e \in E(G)$ existuje kostra K grafu G, která hranu e obsahuje. *4 body*