Úkoly z Kombinatoriky a grafů, 10. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(10.1) Nechť G je rovinný vrcholově 2-souvislý graf a uvažme libovolné jeho rovinné nakreslení. Pořádně dokažte, že hranice každé stěny (i té vnější) je grafová kružnice. *3 body*

(10.2) Dokažte, že ve vrcholově 2-souvislém grafu pro každé dvě hrany existuje kružnice, která je obsahuje. *4 body*

(10.3) Existuje hranově 2-souvislý graf, kde nějaké dvě jeho hrany neleží na kružnici? *3 body*

(10.4) Dokažte či vyvraťte: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že jsou-li hrany úplného grafu K_N libovolně obarveny n barvami, potom v uvažovaném K_N existuje úplný podgraf K_n, jehož všechny hrany mají tutéž barvu. *3 body*

(10.5) Dokažte či vyvraťte: Pro všechna $n, p \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že je-li X libovolná N-prvková množina, jejíž každá neprázdná podmnožina velikosti nanejvýš p je obarvena jednou ze dvou barev, potom existuje n-prvková podmnožina $Y \subseteq X$, jejíž všechny podmnožiny velikosti nejvýš p mají tutéž barvu. *3 body*

(10.6) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že libovolná N-prvková posloupnost reálných čísel obsahuje neklesající nebo nerostoucí podposloupnost délky k. *5 bodů*