# Příklady ke cvičení

*Příklad 1:* Ukažte, že elementární úpravy:
– záměna dvou rovnic a
– přičtení $t$ násobku $j$-té rovnice k $i$-té
se dají provést pomocí elementárních úprav:
– vynásobení $i$-té rovnice nenulovým číslem $t$
– přičtení $j$-té rovnice k $i$-té

*Příklad 2:* Převeďte následující matici $\mathbf{A}$ na odstupňovaný tvar

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

*Příklad 3:* S pomocí elementárních úprav rozhodněte, které z následujících homogenních soustav lineárních rovnic mají totožná řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0 \\ 9x_1 + 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 12x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(E)}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(F)}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0 \\ - 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= 0 \\ - 9x_2 + x_3 - 10x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(G)}$$

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(H)}$$

*Příklad 4:* Uhádněte inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$T_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

co« je matice, která vznikne z identické prohozením $i$. a $j$. řádku.

b)

$$T_i(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

kde $m$ se objevuje v $i$. sloupci a $i$. řádku.

*Příklad 5:* Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Spočítejte součin $\mathbf{AB}$.

b) Spočítejte součin $\mathbf{BA}$.

c) Spočítejte součin $\mathbf{CD}$.

d) Spočítejte součin $\mathbf{DE}$.

*Příklad 6:* Ukažte, že pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla $\alpha, \beta$ platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$

f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$

g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$