Příklady ke cvičení

Příklad 1: Ukažte, že pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$

f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$

g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

Příklad 2: Spočtěte součiny $\mathbf{A}\mathbf{B}_i$ a $\mathbf{B}_i\mathbf{A}$, pro matice
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Jakým úpravám matice $\mathbf{A}$ odpovídají příslušné součiny?

Příklad 3: Uhádněte inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$T_{i,j}(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -m & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

kde $-m$ se objeví v j. řádku a i. sloupci.

Příklad 4: Ukažte, že platí:

a) Každá matice typu $m \times n$ splňuje $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n$

Příklad 5: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

Příklad 6: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 7: Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 8: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vyřešte maticové rovnice

a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$

b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$