# Příklady ke cvičení

*Příklad 1:* Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: $p$, $q$ a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jeko zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.

*Inverze jsou takové páry čísel $i, j$ kde $j$ je v permutaci před $i$ a navíc $j > i$.*

*Mnemotechnický výpočet počtu inverzí ze zápisu permutace $(p(1), p(2), \dots, p(n))$ — pro každé $j$ započti všechna čísla, která jsou v zápisu před $p(j)$, t.j. mezi prvními $j-1$ čísly, a jsou větší než $p(j)$.*

*Složení permutací $q \circ p$ má znaménko $sgn(p)sgn(q)$ — dá se snadno nahlédnout přes počet křížení (dvě křížení se mohou eliminovat).*

*Transpozice $(i, j)$ dá za vznik $2(j - i - 1) + 1$ inverzím, tedy právě změní znaménko.*

*Pro rozklad cyklu na transpozice využijeme pravidla: $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \circ (i_2, \dots, i_k)$ popř. $(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_k) \circ (i_1, \dots, i_{k-1})$.*

*Znaménko permutace je tedy rovno paritě počtu inverzí nebo paritě počtu transpozicí z libovolného rozkladu (rozklad není jednoznačný) nebo též paritě počtu sudých cyklů.*

*Inverze se najde mnemotechnicky: na kterém místě v permutaci je $i$?*

b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.

*Příklad 2:* Ukažte čtyřmi způsoby, proč má inverzní permutace $p^{-1}$ stejné znaménko jako původní permutace $p$?

*Uvažte cykly, počet inverzí, rozklad na transpozice a zachování znaménka při skládání.*

*Příklad 3:* Spočtěte mocniny $p^{10}$ a $q^{99}$ pro permutace $p$ a $q$.

a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.

b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.

*Příklad 4:* Řešte "permutační" rovnici $p \circ x \circ q = \imath$ pro permutace $p$ a $q$.

a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.

b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.

*Příklad 5:* Určete znaménko následující permutace

a) $p = (1, 3, 5, \dots, 2n - 1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$

*Znaménko je rovno paritě počtu inversí.*

b) $p = (1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$