Příklady ke cvičení

Příklad 1: Spočítejte výrazy
a) $(3+2i)+(1-3i)$,
b) $(3+2i)-(1-3i)$,
c) $(3+2i)(1-3i)$,
d) $(3+2i)/(1-3i)$,
e) $(1+i)^{20}$.

Příklad 2: Vyřešte soustavu lineárních rovnic v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad ix_2 &= \quad i \\ ix_1 + (1-i)x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Příklad 3: Najděte všechna řešení soustavy s následující maticí nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Příklad 4: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Příklad 5: Pro $n \in \mathbb{N}$ a asociativní operaci $\cdot$ označme $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, kde na pravé straně rovnosti se prvek a vyskytuje n-krát.

a) Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1\,001}$ a $4^{1\,000\,001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

Počítete mocniny daného základu a všimněte si, kdy poprvé se vyskytne jednotka.

Příklad 6: Z axiomů odvoďte, že pro počítání v tělese $\mathbb{K}$ platí:

a) Pro $a, b \in \mathbb{K}$ má rovnice $a + x = b$ jednoznačné řešení $x \in \mathbb{K}$.

b) Pokud $a + b = a + c$, potom $b = c$.

Příklad 7: Invertujte následující matice v tělesech $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 8: Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{Q}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad\qquad a \odot u = u^a$$

Je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$?

Příklad 9: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.

Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad\qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K}, X = \mathbb{R}$?

Příklad 10: Kolik prvků má aritmetický vektorový prostor $\mathbb{Z}_5^4$? Kolik prvků má nějaký nejmenší a nějaký největší vlastní podprostor $\mathbb{Z}_5^4$? Vypište prvky nejmenšího podprostoru $\mathbb{Z}_5^4$, který obsahuje vektory $(0, 0, 0, 4)^T, (2, 4, 3, 2)^T$ a $(1, 2, 4, 3)^T$.

Příklad 11: V systému podmnožin množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$ braném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b, d, e\}$,
- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a, c, d\}$, $\mathbf{w} = \{b, c\}$, $\mathbf{x} = \{a, b, d, e\}$ a $\mathbf{y} = \{b, e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a, b, e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad 12: Rozhodněte, zdali je struktura $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus, \odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \mod 6$ a $a \odot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} \mod 6$.