# Příklady ke cvičení

*Příklad 1:* Nech $u, v, w$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru $V$ nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u+v, u+w\}$.

b) $\{u+v, u-v, w\}$.

c) $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$.

*Příklad 2:* Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostorech $\mathbb{R}^4, \mathbb{Z}_3^4$ a $\mathbb{Z}_5^4$. Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

a) $X_1 = \{(0,1,2,1)^T, (1,2,0,0)^T, (1,1,2,0)^T, (1,2,1,1)^T\}$.

*Příklad 3:* Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$)

a) $\{2x-1, x-2, 3x\}$.

b) $\{x^2+2x+3, x+1, x-1\}$.

*Příklad 4:* Nechť $V$ je vektorový prostor a $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

a) Je-li $X$ nezávislá, je $Y$ závislá.

b) Je-li $X$ nezávislá, je $Y$ nezávislá.

c) Je-li $Y$ nezávislá, je $X$ nezávislá.

d) Je-li $X$ závislá, je $Y$ závislá.

e) Je-li $Y$ závislá, je $X$ závislá.

*Příklad 5:* Doplňte množinu $M$ na bázi vektorového prostoru $V$.

a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

*Vyberte si vhodnou pomocnou bázi, která bude obsahovat kandidáty na doplnění.*

b) $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$, v prostoru $V$ reálných polynomů stupně nejvýše tři.

*Příklad 6:* Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U_1 = \mathcal{L}((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T)$.

b) $V_1 = \{(x_1,\ldots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5+x_6+2x_7 = 0,$
$3x_1+4x_2+3x_3+x_4+4x_5+2x_6+4x_7 = 0,\ 2x_1+x_2+4x_3+4x_5+2x_7 = 0\}$.

*Příklad 7:* Ukažte, že pokud je $V$ podprostorem prostoru $W$ konečné dimenze, potom existují báze $X$ prostoru $V$ a báze $Y$ prostoru $W$ takové, že $X \subseteq Y$.

*Příklad 8:* V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete souřadnice vektoru $[u]_X$ vzhledem k uspořádané bázi
$X = ((1,-3,7,2)^T, (3,2,1,-4)^T, (0,-1,4,-3)^T, (-2,4,-3,0)^T)$
pro vektory $u_1 = (2,2,9,-5)^T$, $u_2 = (-7,2,9,-8)^T$ a $u_3 = (4,-42,31,20)^T$.

*Příklad 9:* V prostoru polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 s bazí $X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$
určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

a) $f(x) = x^4 - 1.$

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

*Příklad 10:* Souřadnice vektoru $u$ vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru $u$ vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.