Příklady ke cvičení

Příklad 1: Ukažte, že elementární úpravy:
– záměna dvou rovnic a
– přičtení t násobku j-té rovnice k i-té
se dají provést pomocí elementárních úprav:
– vynásobení i-té rovnice nenulovým číslem t
– přičtení j-té rovnice k i-té

Záměna dvou rovnic, i-té a j-té:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{j1} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{j1} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ -a_{i1} & \dots & -a_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ -a_{i1} & \dots & -a_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Přičtení t násobku j-té rovnice k i-té:
Jestliže $t = 0$, soustava se nezmění. Můžeme proto předpokládat, že $t \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ ta_{j1} & \dots & ta_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+ta_{j1} & \dots & a_{in}+ta_{jn} \\ ta_{j1} & \dots & ta_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1}+ta_{j1} & \dots & a_{in}+ta_{jn} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Příklad 2: Převeďte následující matici $\mathbf{A}$ na odstupňovaný tvar

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

Kupříkladu

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -9 & -8 & -21 \\ 0 & -9 & -8 & -21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 26 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: S pomocí elementárních úprav rozhodněte, které z následujících homogenních soustav lineárních rovnic mají totožná řešení.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} + 4x_4 &= 0 \quad \text{(A)} \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \phantom{{}+4x_4} &= 0 \\ 3x_1 \phantom{{}+3x_2} + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \quad \text{(B)} \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} + 4x_4 &= 0 \\ 9x_1 \phantom{{}-2x_2} + 3x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \quad \text{(C)}\\
x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
3x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \quad \text{(D)}\\
3x_1 + 9x_2 + 12x_4 &= 0\\
3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 + 8x_4 &= 0 \quad \text{(E)}\\
x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0\\
4x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 6x_4 &= 0\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \quad \text{(F)}\\
3x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0\\
3x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 0 \quad \text{(G)}\\
- 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= 0\\
- 9x_2 + x_3 - 10x_4 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
6x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \quad \text{(H)}\\
x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 0\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Obecně lze úlohu vyřešit např. srovnáním hodností matic původních a sloučených úloh (to ale v této chvíli ještě neznáme).

Alternativně lze hledat nějaký jednoznačný odstupňovaný tvar, např. Gauss-Jordanovou eliminací (všechny pivoty 1, v sloupcích nad pivoty samé 0).

My se pokusíme uhodnout elementární úpravy na A vedoucí k matici soustavy B (stačí nerozšířené matice neboť všechny soustavy jsou homogenní).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 0 & 12 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = D$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -8 \\ 0 & -9 & 1 & -10 \end{pmatrix} = G$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = H$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro důkaz různosti množin řešení je třeba ukázat, že neexistuje žádná přípustná lineární kombinace jak vyjádřit nějaký nový řádek z původních. To vede k soustavě lin. rovnic, která nemá žádné řešení.

Pro náš případ ukážeme, že poslední řádek matice F se nedá vyjádřit jako lineární kombinace řádků z matice A. Musely by existovat x, y, z tak, že
$(3, -1, 6, 4) = x(1, 3, 0, 4) + y(2, 1, 3, 0) + z(3, 0, 1, 2)$, *což vede k rozšířené matici jež nepřipouští žádné řešení:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Soustavy A, B, D, E, G mají shodná řešení a také soustavy F a H.

Soustava C je jen "částí" A, její množina řešení je tedy širší.

Příklad 4: Uhádněte inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$T_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

co« je matice, která vznikne z identické prohozením i. a j. řádku.

$T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}$.

b)

$$T_i(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

kde m se objevuje v i. sloupci a i. řádku.

$T_i(m)^{-1} = T_i(1/m)$.

Příklad 5: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Spočítejte součin $\mathbf{AB}$.

$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Spočítejte součin $\mathbf{BA}$.

$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Spočítejte součin $\mathbf{CD}$.

$\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Spočítejte součin $\mathbf{DE}$.

$$\mathbf{DE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6: Ukažte, že pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$

f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$

g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

Řešíme porovnáním matic na levé a pravé straně rovnosti po složkách:

a) $(\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} = a_{ij} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} + c_{ij} = ((\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C})_{ij}$

První, druhá, čtvrtá a pátá rovnost jsou jen rozepsáním definice součtu matic. Třetí rovnost vyjadřuje asociativitu součtu reálných čísel.

b-l) rozepíšeme obdobně, pouze j) neplatí (chyták!), správně má být:

$\alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$