Příklady ke cvičení

Příklad 1: Ukažte, že pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného typu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$

d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$

e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$

f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$

g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

Řešíme porovnáním matic na levé a pravé straně rovnosti po složkách:

a) $(\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}))_{ij} = a_{ij} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} + c_{ij} = ((\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C})_{ij}$

První, druhá, čtvrtá a pátá rovnost jsou jen rozepsáním definice součtu matic. Třetí rovnost vyjadřuje asociativitu součtu reálných čísel.

b-l) rozepíšeme obdobně, pouze j) neplatí (chyták!), správně má být:

$\alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

Příklad 2: Spočtěte součiny $\mathbf{A}\mathbf{B}_i$ a $\mathbf{B}_i\mathbf{A}$, pro matice

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Jakým úpravám matice $\mathbf{A}$ odpovídají příslušné součiny?

$\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$ *odpovídá výběru prvního sloupce.*

$\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *odpovídá výběru prvního řádku.*

$\mathbf{A}\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} \\ 0 & a_{2,1} \end{pmatrix}$ *vybere první sloupec a umístí jej na místo druhého.*

$\mathbf{B}_2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *vybere druhý řádek a umístí jej na místo prvního.*

$\mathbf{A}\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{pmatrix}$ *a* $\mathbf{B}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$ *t.j. první součin prohodí sloupce, druhý řádky.*

Obecně násobení matice $\mathbf{A}$ *zleva* $\mathbf{BA}$ *odpovídá řádkovým úpravám matice* $\mathbf{A}$*, zatímco součiny zprava* $\mathbf{AB}$ *odpovídají sloupcovým úpravám.*

Příklad 3: Uhádněte inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$T_{i,j}(m) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -m & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

kde $-m$ se objeví v j. řádku a i. sloupci.

$T_{i,j}(m)^{-1} = T_{i,j}(-m)$.

Příklad 4: Ukažte, že platí:

a) Každá matice typu $m \times n$ splňuje $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n$

Součin $(\mathbf{I}_m\mathbf{A})_{ij}$ vybere z j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ i-tý prvek neboli a_{ij}.

Příklad 5: Spočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

a vysvětlete jaký je význam těchto matic jednotlivě a jejich součinu.

Příklad 6: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Sestavíme matici $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ a elementárními úpravami ji převedeme na tvar $(\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$.

V našem případě

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ 2/15 & -2/5 & -1/3 & 8/15 \\ 1/5 & 2/5 & 0 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$\mathbf{D}^{-1}$ neexistuje, matice je singulární.

Příklad 7: Najděte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 8: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vyřešte maticové rovnice

a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$

Nejprve si vyjádříme $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{A}$ *a máme* $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$

$\mathbf{X}_2 = (\mathbf{C} + \mathbf{D})\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -13/15 & 3/5 & -1/3 & 23/15 \\ 3/5 & -4/5 & 0 & 7/5 \\ -1/3 & 1 & -2/3 & 5/3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.