Příklady ke cvičení

Příklad 1: Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi K.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Stačí určit obrazy vektorů kanonické báze $e_1 = (1,0)^T$ a $e_2 = (0,1)^T$ vůči téže bázi K při osové souměrnosti f. Zřejmě $[f(e_1)]_K = f(e_1) = (0,1)^T$ a podobně $f(e_2) = (1,0)^T$.

Z nich již snadno sestavíme matici osové souměrnosti $[f]_{KK} = \Big(f(e_1), f(e_2)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) otočení o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Matice otočení $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

Určete délky přilehlých a protilehlých odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku daným úhlem α.

Matice otočení $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Matice projekce je $[p_1]_{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 2: Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ užitím matic zobrazení.

Použijte vzath pro výpočet matice složeného zobrazení.

Jsou-li f a g zobrazení otočení o úhel α a β, pak jejich matice jsou
$[f]_{KK} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *a* $[g]_{KK} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

Složení zobrazení f a g je otočení o úhel $\alpha+\beta$ s maticí
$[g \circ f]_{KK} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.

Zároveň musí platit $[g \circ f]_{KK} = [g]_{KK}[f]_{KK} =$
$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Porovnáním obou matic získáme kýžené součtové vzorce.

Příklad 3: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi K (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2,4,1)^T$, $u_2 = (2,3,4)^T$ a $u_3 = (3,0,1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2,1,2)^T$, $f(u_2) = (0,4,1)^T$ a $f(u_3) = (4,4,1)^T$.

Použijte vztah $[f(u)]_K = [f]_{KK}[u]_K$.

Vycházíme z maticové rovnice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [f]_{KK} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Tuto přinásobíme zprava maticí $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Maticí zobrazení je $[f]_{KK} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = ((1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T)$,
$B = ((1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T)$.
Nalezněte matice přechodu:

a) $[id]_{AK}$, tj. od báze A ke kanonické bázi.

Postupujeme pomocí elementárních úprav následujících matic: A je matice se sloupci z báze A, totéž pro B, potom $(B|A) \sim (I, [id]_{AB})$.

$$[id]_{AK} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) $[id]_{KB}$, tj. od kanonické báze k bázi B.

$$[id]_{KB} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) $[id]_{AB}$, tj. od báze A k bázi B.

$$[id]_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5: Ukažte, že platí $[id]_{AB} = ([id]_{BK})^{-1}[id]_{AK}$ a ověřte tento fakt na bazích z předchozího příkladu.

Požijte větu o matici složeného zobrazení.

Do vztahu $[g \circ f]_{XZ} = [g]_{YZ}[f]_{XY}$ dosadíme $f = g = id$, $X = A$, $Y = K$ a $Z = B$, čímž dostaneme $[id]_{AB} = [id]_{KB}[id]_{AK}$.

Matice přechodu od libovolné báze k té samé bázi je jednotková matice $[id]_{BB} = I_n$, protože se vektory (zobrazení je id) a tím pádem ani souřadnice nemění (báze je stejná).

Opětovným dosazením $f = g = id$, $X = Z = B$ a $Y = K$ dostaneme $[id]_{KB}[id]_{BK} = [id]_{BB} = I_n$. Odtud $[id]_{KB} = ([id]_{BK})^{-1}$, protože obě matice jsou čtvercové (obě báze jsou stejně velké).

Substitucí $[id]_{KB} = ([id]_{BK})^{-1}$ do $[id]_{AB} = [id]_{KB}[id]_{AK}$ dostaneme kýžený vztah.