Písemka z lineární algebry, skupina A

Pokuste se v rámci (časových) možností vše pečlivě odůvodnit. Používání libovolné elektroniky je zakázáno, literaturu (sešit, učebnice, …) používat můžete. Na řešení máte 30 minut. Součet všech bodů je 11.

(1) Invertujte v tělese $\mathbb{Z}_3$ matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6 bodů

(2) Dokažte, že ve vektorovém prostoru V nad tělesem T platí

$$\forall u \in V : -(-u) = u,$$

tedy že opačný vektor od opačného vektoru od u je opět původní vektor u. Důkaz proveďte důsledně formální, čili v každém kroku vždy používejte vždy jeden axiom vektorového prostoru nebo tělesa (a nic jiného!). Zdůvodňujte, který axiom zrovna používáte (např. vzorcem, formulí, slovy). Dávejte si též pozor na správné uzávorkování (např. u výrazu $a + b + c$ je potřeba dodat závorky, protože není jasné, která operace se má udělat dříve), zkrátka na všechny náležitosti a detaily. *5 bodů*

Písemka z lineární algebry, skupina B

Pokuste se v rámci (časových) možností vše pečlivě odůvodnit. Používání libovolné elektroniky je zakázáno, literaturu (sešit, učebnice, …) používat můžete. Na řešení máte 30 minut. Součet všech bodů je 11.

(1) Invertujte v tělese $\mathbb{Z}_5$ matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6 bodů

(2) Dokažte, že v nekomutativním tělese T platí

$$\forall a \in T \setminus \{0\} : (a^{-1})^{-1} = a,$$

tedy že inverzní prvek k inverznímu prvku od a je opět původní prvek a. Důkaz proveďte důsledně formální, čili v každém kroku vždy používejte vždy jeden axiom tělesa (a nic jiného!). Zdůvodňujte, který axiom zrovna používáte (např. vzorcem, formulí, slovy). Dávejte si též pozor na správné uzávorkování (např. u výrazu $a + b + c$ je potřeba dodat závorky, protože není jasné, která operace se má udělat dříve), zkrátka na všechny náležitosti a detaily. *5 bodů*