Příklady ke cvičení

Příklad 1: Vypočtěte derminanty následujících matic:

a) $A = \begin{pmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

Nejpve použijte řádkové úpravy.

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Spočítejte derminanty matic

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Příklad 3: Určete derminanty těchto matic:

a) $L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Určete determinant matice

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5: Určete determinant následující matice:

a) $S_n = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + x \end{pmatrix},$

Příklad 6: Spočítejte determinant matice

a) $R = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 7: Spočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}^T = (3,1,1)$, $\mathbf{b}^T = (2,1,1)$ a $\mathbf{c}^T = (2,3,2)$.

(Rovnoběžnostěn obsahuje body, které lze vyjádřit lineární kombinací $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$, kde $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.)

Příklad 8: Nechť lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ převádí vektory
$\mathbf{a}^T = (1,3,1), \mathbf{b}^T = (1,0,3), \mathbf{c}^T = (1,1,1)$ na vektory
$f(\mathbf{a})^T = (3,1,0), f(\mathbf{b})^T = (1,0,2), f(\mathbf{c})^T = (4,1,5)$.

Určete objem V elipsoidu $f(B_3)$, který vznikne jako obraz jednotkové koule B_3 (rozuměj koule o jednotkovém poloměru) v zobrazení f.

Příklad 9: Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lze řešit Cramerovým pravidlem $x_i = \frac{|A_{i\to\mathbf{b}}|}{|A|}$ kde matice $A_{i\to\mathbf{b}}$ vznikne s A nahrazením i-tého sloupce vektorem $\mathbf{b}$.

Příklad 10: Řešte v $\mathbb{Z}_5$ soustavu:

$$\begin{aligned} 2x + y + 4z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 4y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Příklad 11: Pomocí determinantů adjungovaných matic najděte matice inverzní (pokud existují) k následující matici a to jak nad tělesem reálných čísel i nad tělesem $\mathbb{Z}_5$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Počítání invereze pomocí adjungované matice: $(adj(A))_{j,i} = (-1)^{i+j}|M_{i,j}|$, kde $M_{i,j}$ je minor matice vzniklý odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce z matice A. (všimněte si prohození indexů).

Inverze se spočítá: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A)$.