Příklady ke cvičení

Příklad 1: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

a) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Příklad 2: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{C}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla λ_i matice A jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matice je diagonalizovatelná právě když a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

Toto platí např. když je řádu n a má n různých vlastních čísel.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 5: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.