Příklady ke cvičení

Příklad 1: Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (1, 1+i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a+bi)$ (s reálnými parametry a, b)

Připomínám: $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}$*, a* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *pokud* $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$.

b) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

c) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

d) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.

Příklad 2: Nechť je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

Příklad 3: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus). Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý:

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

V $\mathbb{R}^n$ *platí:* $\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||}$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

Příklad 4: Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

Příklad 5: Pro skalární součin $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ukažte, že funkce $1, x, 3x^2 - 1, 5x^3 - 3x$ jsou na sebe navzájem kolmé v prostoru polynomů na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Příklad 6: Mějme dva kolmé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Dále nechť $\|\mathbf{u}\| = 12, \|\mathbf{v}\| = 5$. Určete $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Kolmost znamená, že $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$. *Dále užij rozepsání normy na skalární součin a axiomy skalárního součinu.*