Příklady ke cvičení

Příklad 1: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Odečtením projekcí spočteme nejprve kolmý vektor
$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i | \mathbf{z}_j \rangle \mathbf{z}_j$; *a ten pak normalizujeme* $\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{||\mathbf{y}_i||}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

a) viz matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru na bázi $\mathbb{R}^4$. Nejprve převedeme matici do odstupňovaného tvaru. Poté bázi rozšíříme třeba o řádky s "chybějícími" pivoty..

Podotýkám, že jádro je ortogonálním doplňkem řádkového prostoru, t.j. rozšíření báze tvoří ortonormální bázi jádra.

b) viz matice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Příklad 3: Pro matice z předchozího příkladu určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

a) viz matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) viz matice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Příklad 4: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Postupujeme G-S ortonormalizací. Hledaná vzdálenost je de facto rovna normě vektoru $\mathbf{y}_3$, kde vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ odpovídají bodům B a C a vektor $\mathbf{x}_3$ bodu A.

Příklad 5: Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní a pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Zkuste použít větu, že $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A' \end{pmatrix}$ je pozitivně definitní, pokud $\alpha > 0$ a $A_1 = A' - \frac{1}{\alpha}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ je pozitivně definitní.

Pro Choleského rozklad, postupujte podle následujícího předpisu pro $k = 1, \ldots, n$. (Uvědomte si, že algoritmus je přímočarý, víme-li, jak se má násobení $U^T U$ projevit v A) Postupně vyplňujeme řádky U:

$u_{i,i} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$ *(nevyjde-li kladné číslo, není matice pozitivně definitní)*

a pro každé i a $j = i + 1, \ldots, n$

$u_{i,j} = \frac{1}{u_{i,i}}\left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} u_{k,i}\right)$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Příklad 6: Ukažte, že pro pozitivně definitní matice A a B jsou matice $A + B$ a A^{-1} pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že A je regulární).