Příklady ke cvičení

Příklad 1: Rozviňte determinant reálné matice:

a) $W = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \\ -1 & 2 & -1 & d \end{pmatrix}$

$|W| = 6a - 18b - 24d$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix}$

$|X| = abcd - ad - bc + 1$

Příklad 2: Určete determinant následující matice:

a) $T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$

Eliminujeme prvky na diagonále tím, že odzadu přičteme k sloupci x-násobek jeho následníka. Na vedlejší diagonále zůstanou samé -1, a na spodním řádku dostaneme odzadu $a_n, a_{n-1} + xa_n, a_{n-2} + xa_{n-1} + x^2 a_n, \dots, a_0 + xa_1 + x^2 a_2 + \dots + x^n a_n$. Jediná permutace dává nenulový sčítanec a to $|T_{n+1}| = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i$.

Alternativně lze provést rozvoj podle prvního sloupce.

Příklad 3: Spočítejte determinant matice

a) $S = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{pmatrix}$

$|S| = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = 1$ *(Sarrusovo pravidlo)*

Příklad 4: Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

Ano, plyne z linearity determinantu vůči každému řádku, čísla 697, 476 a 969 dostaneme, když stonásobek prvního a desetinásobek druhého sloupce přičteme ke třetímu sloupci.

Formálně: $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 & 697 \\ 4 & 7 & 476 \\ 9 & 6 & 969 \end{vmatrix} = 17 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 9 & \frac{697}{17} \\ 4 & 7 & \frac{476}{17} \\ 9 & 6 & \frac{969}{17} \end{vmatrix}$ *, kde poslední matice je celočíselná a má tedy celočíselný determinant.*

Příklad 5: Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

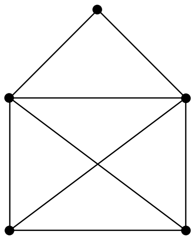
$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Předpokládejme nejprve, že $x, y, z \neq 0$ a proveďme následující úpravy: vydělíme 2-4 sloupec x, y, z poté vynásobíme 2-4 řádek yz, xz a xy a nakonec vydělíme první sloupec xyz.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & \frac{z}{y} & \frac{y}{z} \\ y & \frac{z}{x} & 0 & \frac{x}{z} \\ z & \frac{y}{x} & \frac{x}{y} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ xyz & 0 & z^2 & y^2 \\ yxz & z^2 & 0 & x^2 \\ zxy & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Každý výraz v rovnosti je racionální funkcí v proměnných x, y a z, oba krajní determinanty jsou dokonce polynomy. Pokud je některá z proměnných rovna 0, musí se (krajní) polynomy rovnat i v bodech nespojitosti (vnitřních) racionálních funkcí, protože polynomy jsou spojité a ve vlastní limitě musí nabývat stejných hodnot. Rovnost tedy platí pro libovolné hodnoty proměnných x, y a z.

Příklad 6: Pomocí determinantu určete počet koster následujícího grafu:



Laplaceova matice grafu je

$$L = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podle věty o počtu koster je

$$\kappa(G) = \det(L^{1,1}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 19 & -9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 19 & -9 \end{vmatrix} = -4(9 - 19) = 40.$$

Lze ověřit, že je tomu skutečně tak výčtem všech koster: K_4 má 16 koster a ke každé z nich jsou dvě možnosti, jak připojit horní vrchol (zprava, zleva) — celkem 32 možností. Jinak kostra obsahuje celou stříšku a v tom případ máme 4 možnosti, které obsahují základnu, a 4, které ji neobsahují.

Graf má 40 koster.