Příklady ke cvičení

Příklad 1: Určete součet, rozdíl, součin a podíl následujících polynomů p a q.

a) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, $q(x) = x^2 + 2x + 2$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Součet a rozdíl po složkách:
$(p+q)(x) = 3x^3 + 3x^2 + x + 3$
$(p-q)(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 4$

Součin roznásobením — lze použít i známý postup pro součin vícemístných čísel. Nezapomeňte eliminovat mocniny vyšší než 5 podle Malé Fermatovy věty:
$(pq)(x) = 3x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2 = 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

Podíl
$p(x) = q(x) \cdot (3x + 1) + (x + 4)$.

Příklad 2: V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom, stupně nejvýše p, který nabývá stejných hodnot.

a) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

$x^6 + x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Příklad 3: Určete, kolik je různých polynomů p stupně právě tři nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(3) = 2$. Popište všechny takové polynomy.

Má-li být $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, potom pro a_3 máme čtyři volby: $1, \ldots, 4$; pro a_2 a a_1 pět voleb: $0, \ldots, 4$; a a_0 dopočítáme z dosazení 3 za x. Dohromady tyto volby dávají sto možností.

Hledané polynomy mají tři parametry a platí $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + (3a_3 + a_2 + 2a_1 + 2)$.

Příklad 4: Najděte kubický polynom f s celočíselnými koeficienty, aby $(x-1)|f$ a navíc $f(2) = f(3) = f(4)$.

Odvoďte vztahy pro koeficienty polynomu $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ze vztahu $(x-1)|f$ plyne, že $x = 1$ je kořen polynomu, tedy $a + b + c + d = 0$.

Dosazením za x získáme také $8a + 4b + 2c + d = 27a + 9b + 3c + d = 64a + 16b + 4c + d$.

Vzájemným odečítáním získáme $19a + 5b + c = 0$ a $37a + 7b + c = 0$, a následně $9a + b = 0$. Volbou za $a = -1$ dopočítáme ostatní koeficienty.

Úloha má více řešení, např. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 26x + 18$.

Obecné řešení zní: $f(x) = ax^3 - 9ax^2 + 26ax - 18a$.

Příklad 5: Zjistěte násobnost

a) kořene 1 v polynomu $x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 3$ nad $\mathbb{Z}_5$.

Polynom dělíme monomem $(x-1)$ tak dlouho, až 1 přestane být kořenem.

$x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 3 = (x-1)^2(x^2 + 4x + 3)$

b) kořene 6 v polynomu $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 6$ nad $\mathbb{Z}_7$.

$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 6 = (x+1)(x^3 + 2x^2 + 4x + 6)$.

Příklad 6: Najděte **všechny** polynomy **čtvrtého** stupně, jejíž graf prochází zadanými body.

a) Najděte **všechny** polynomy **čtvrtého** stupně, jejíž graf prochází body $[-1, 3]$, $[0, -3]$, $[1, 3]$ a $[2, 15]$.

Označte si obecný polynom čtvrtého stupně $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ pomocí zadaných bodů sestavte soustavu.

Označme si obecný polynom čtvrtého stupně $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Dosazením jednotlivých bodů získáme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrrrrcr} a & -b & +c & -d & +e & = & 3 \\ & & & & e & = & -3 \\ a & +b & +c & +d & +e & = & 3 \\ 16a & +8b & +4c & +2d & +e & = & 15 \end{array}$$

Z druhé rovnice rovnou známe hodnotu $e = -3$, kterou dosadíme do zbylých rovnic a výslednou soustavu zapíšeme maticově.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 12 & 8 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 12 & 6 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Z poslední matice vidíme, že $b = -d$, $c = -a + 6$, $b = -2a - 1$. Vyjádřením proměnné a dojdeme k závěru, že všechny polynomy čtvrtého stupně mají tvar

$$p(x) = ax^4 - (1 + 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + (1 + 2a)x - 3, \text{ kde } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Možnost $a = 0$ jsme zakázali, protože nedává polynom čtvrtého stupně.

$p(x) = ax^4 - (1 + 2a)x^3 + (6 - a)x^2 + (1 + 2a)x - 3,\ kde\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$