Příklady ke cvičení

Příklad 1: Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Nalezněte jejich vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory a pokuste se je geometricky vysvětlit.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Zobrazení odpovídá dvojnásobnému zvětšení. Proto jsou vlastní čísla $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Libovolný vektor je vlastní, zobrazení ho dvakrát prodlouží - nakreslete si obrázek.

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Zobrazení odpovídá zvětšení v ose x. Vektory na osách jsou vlastní, přísluší k vlastním číslum 1 a 2. Mimo osy vektory mění směry.

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

Zobrazení odpovídá zkosení a zároveň zvětšení. Má dvojnásobné vlastní číslo 2, avšak vlastní vektory leží pouze na ose x. Jejich geometrická násobnost je tedy 1.

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Zobrazení odpovídá zrcadlení podle osy 2. a 4. kvadrantu. Proto má vlastní čísla 1 a -1, které odpovídají vektorům ležícím na ose (jejich délka se nemění) a kolmo na ní (otáčí se na druhou stranu).

e) $\mathbf{E} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Zobrazení je kolmá projekce na osu 1. a 3. kvadrantu. Vlastní čísla jsou 1 a 0 a odpovídají vlastním vektorům na ose (nemění se) a vlastním vektorům kolmým na osu (zobrazují se do nuly).

f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Rotace o 90 stupňů v kladném směru. I když to geometricky nevypadá, i tato matice má vlastní čísla a vlastní vektory – komplexní $+i$ a $-i$ s vlastními vektory $(1, i)$ a $(1, -i)$. Geometrické vysvětlení je takové, že násobení imaginární jednotkou i otáčí čísla v komplexní rovině o 90 stupňů.

g) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Rotace o obecný úhel φ. Snadným výpočtem nalezneme, že vlastní čísla jsou $e^{\varphi i}$ a $e^{-\varphi i}$ s vlastními vektory $(1, i)$ a $(1, -i)$. Opět, násobení komplexním číslem $e^{\varphi i}$ znamená rotaci v komplexní rovině o úhel φ.

Příklad 2: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice nad tělesem Z_5. Určete, zdali je tato matice diagonalizovatelná.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}_1 = c \cdot (0, 1, 3)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x}_2 = c \cdot (1, 0, 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = c \cdot (1, 4, 0)^T$;

Je diagonalizovatelná. Diagonální tvar je například $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 3: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad tělesem $\mathbb{C}$

a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla λ_i matice A jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\begin{vmatrix} 2-t & 6 \\ 6 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + t - 42 = (t-6)(t+7)$ *čili* $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -7$

Vlastní vektory spočítáme řešením příslušných soustav lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

kde dostaneme řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = c \cdot (3, 2)^T$.

Pro druhé vlastní číslo -7

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

dostaneme řešení $\mathbf{x} = c \cdot (2, -3)^T$.

Matice těchto soustav jsou vždy singulární (tak jsou volena vlastní čísla), proto si všimněte, že u matic řádu 2 je vždy druhý řádek skalárním násobkem předchozího.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 + i,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 1 + i)^T$;
$\lambda_2 = 1 - i,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 1 - i)^T$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 6,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 1)^T$;
$\lambda_2 = -1,\ \mathbf{x} = c \cdot (-5, 2)^T$;

d) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 9,\ \mathbf{x} = c \cdot (5, 2)^T$;

$\lambda_2 = -5,\ \mathbf{x} = c \cdot (-1, 1)^T$;

Příklad 4: Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Matice je diagonalizovatelná právě když a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

Toto platí např. když je řádu n a má n různých vlastních čísel.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 1, -1)^T$.

Není diagonalizovatelná.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 2,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 1,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, 0, 1)^T$; $\lambda_3 = -1,\ \mathbf{x} = c \cdot (0, 1, -1)^T$;

Je diagonalizovatelná.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \mathbf{x} = c \cdot (1, -2, 1)^T$; $\lambda_3 = 0,\ \mathbf{x} = c \cdot (4, 4, 1)^T$;

Není diagonalizovatelná.

Příklad 5: Určete vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Rozvojem podle 2. a 4. řádku a 3. sloupce dostaneme

$$\begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)^2 \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 4 & -3-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t)^3(1+t)$$

Vlastní čísla jsou 2, 1 (trojnásobné) a -1.

Příklad 6: U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to $3, -4$ a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Nejpracnější způsob: vydělit charakteristický polynom monomy známých vlastních čísel.

Jednodušší, ale stále pracný postup: využít faktu že součin vlastních čísel je determinant matice. (Lze odvodit dosazením 0 do charakteristického polynomu.)

Nejjednodušší způsob: použít fakt, že součet vlastních čísel je roven součty prvků na diagonále, (Plyne z koeficientu u členu t^{n-1} *v charaktaristickém polynomu.)*

Zbývající vlastní číslo je 7.

Příklad 7: Ve městě Pupákově jsou tři strany: Asketičtí, Bohatí a Chudí. Podrobným výzkumem se zjistilo, že 75 % z těch voličů co volilo Askety, je bude volit opět, 5 % bude volit Bohaté a 20 % Chudé. Podobně z těch co volili Bohaté zvolí 60 % opět Bohaté, 20 % Askety a 20 % Chudé. 80 % voličů Chudých je bude volit i v následujícím období, o zbylé hlasy se podělí 10 % Asketi a 10 % Bohatí.

Jak bude vypadat limitní rozložení sil v místím (řekněme stočlenném) zastupitelstvu?

Změny počtu hlasů lze modelovat lineárním zobrazním $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, určené maticí* F*. (Musí platit vztah* $\mathbf{x}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t) = F\mathbf{x}_t$*, kde* x_t *značí rozložení mandátů v t=tém volebním období)*

$$F = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,20 & 0,10 \\ 0,05 & 0,60 & 0,10 \\ 0,20 & 0,20 & 0,80 \end{pmatrix}$$

Matice F *se nazývá stochastická matice, protože má sloupcové součty rovny 1. Všimněte si, že násobení vektoru takovou maticí zachovává souřadnicový součet vektoru. Navíc obraz vektoru, jehož souřadnice jsou nezáporné je teké nezáporný.*

Pro řešení úlohy musíme ověřit, že 1 je vlastní číslo matice F *a najít příslušný vlastní vektor, neboli vyřešit soustavu* $F\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Zlomků se při výpočtu můžeme zbavit, když dočasně vynásobíme celou matici 20, ale na závěr musíme pomocná vlastní čísla vydělit 20.

$$F' = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 2 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Pro úplnost si spočítáme všechna vlastní čísla matic F' *a* F*. První dvojice je* $\lambda'_1 = 20$, $\lambda_1 = 1$*, druhá:* $\lambda'_2 = 12$, $\lambda_2 = 12/20$ *a třetí :* $\lambda'_3 = 11$, $\lambda_3 = 11/20$.

Hledáme takový vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 1$*, jehož souřadnice dávají v součtu 1. Dostaneme limitní řešení:* $\mathbf{x} = (1/3, 1/6, 1/2)^T \doteq (33\%, 17\%, 50\%)^T$

Jak vypadají ostatní vlastní vektory? Nutně musí mít souřadnicový součet nulový, jinak by se nemohly nechat "škálovat" vlastním číslem a zároveň zachovat souřadnicový součet. (Tudíž mají alespoň jednu souřadnici zápornou.)

Řešením příslušných soustav je: $\mathbf{x} = c \cdot (-2, 1, 1)^T, \mathbf{x} = c \cdot (-1, 1, 0)^T$.

Ještě poznámka ke konvergenci: V uvažovaném prostoru pravděpodobnostních vektorů (t.j. vektorů z konvexního obalu kanonické báze — součet po souřadnicích musí být 1 a všechny souřadnic nezáporné) je lineární zobrazení předepsané maticí F kontrakcí, neboli zkracuje normu rozdílu dvou takových vektorů. Proto postupným iterováním dostaneme limitu (vzdálenost od pevného bodu — limity zobrazení — bude shora omezena geometrickou řadou).

Příklad 8: Rozložte matici X na součin $X = RJR^{-1}$, kde matice R je regulární a matice J je v Jordanově normálním tvaru.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

Pokud je každé vlastní číslo jednonásobné, lze Jordanův rozklad RJR^{-1} sestrojit tak, že J je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále a R obsahuje jako sloupce vlastní vektory.

$\begin{vmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{vmatrix} = t^2 - 13t + 36 = (t-9)(t-4)$ *čili* $\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = 4.$

Pro $\lambda_1 = 9$ *máme* $-20x_1 + 30x_2 = 0$ *s řešením* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (3,2)^T$.

Pro $\lambda_2 = 4$ *máme* $-15x_1 + 30x_2 = 0$ *s řešením* $\mathbf{x} = (2,1)^T$.

$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 9: S využitím Jordanova normálního tvaru spočtěte třetí mocninu a druhou odmocnimu následující matice

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

Třetí mocninu matice $X = RJR^{-1}$ *lze snadno spočítat jako* $X^3 = RJ^3R^{-1}$.

Odmocninu spočítáme jako $RJ^{\frac{1}{2}}R^{-1}$, *kde matice* $J^{\frac{1}{2}}$ *má na diagonále odmocniny z vlastních čísel.*

(Celkem 2^n *řešení u matic řádu n.)*

$\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 729 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1931 & 3990 \\ -1330 & 2724 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} -6 & 14 & -14 \\ 49 & -97 & 161 \\ 56 & -112 & 176 \end{pmatrix}$, *odmocnina:* $\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-2 & 2-2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}-5 & 7-4\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}-4 & 6-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -112 & 1 & 63 \\ -112 & 0 & 64 \end{pmatrix}$, *odmocnina:* $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2}-4 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2}-4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Třetí mocnina: $\begin{pmatrix} 64 & -56 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 126 & -119 & 1 \end{pmatrix}$ *odmocnina:* $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2}-2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & \sqrt{2}-3 & 1 \end{pmatrix}$.