Příklady ke cvičení

Příklad 1: Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (1, 1+i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a+bi)$ (s reálnými parametry a, b)

Připomínám: $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle}$, *a* $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *pokud* $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$.

$\mathbf{x}^T = (1, 1+i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a+bi)$ *tedy* $\overline{\mathbf{y}}^T = (-2i, a-bi)$

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = -2i + (1+i)(a-bi) = a+b+(a-b-2)i$

$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ *pro* $a = 1$, $b = -1$

$||\mathbf{x}|| = \sqrt{1^2 + (1+i)(1-i)} = \sqrt{3}$

$||\mathbf{y}|| = \sqrt{2i(-2i) + (a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^b + b^2 + 4}$

$(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T = (1-2i, 1-a+(1-b)i)$

$||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a - 2b + 7}$

b) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 8$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{29}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{30}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{43}$,

c) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = -4$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{14}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{14}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 6$.

d) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{21}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{33}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 3\sqrt{6}$,

e) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1)$, $\mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 5$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{22}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{21}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{33}$,

f) $\mathbf{x}^T = (2+i, 0, 4-5i)$, $\mathbf{y}^T = (1+i, 2+i, -1)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 4i - 1$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{46}$, $||\mathbf{y}|| = 2\sqrt{2}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 2\sqrt{14}$,

g) $\mathbf{x}^T = (1, 2, 1, -2i)$, $\mathbf{y}^T = (i, 2i, i-1, 2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = -1 - 10i$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{10}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{11}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{23}$.

Příklad 2: Nechť je skalární součin nad $\mathbb{C}^3$ dán předpisem:

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$$

Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

1. skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
2. euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
3. vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
4. zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 13$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = 5\sqrt{2}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{14}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = \sqrt{38}$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{14}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{6}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 2\sqrt{5}$.

c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 2$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{29}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{29}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 3\sqrt{6}$.

d) $\mathbf{x}^T = (2+i, 0, 4-5i)$, $\mathbf{y}^T = (1+i, 2+i, -1)$.

$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = -2-5i$, $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$, $||\mathbf{x}|| = \sqrt{87}$, $||\mathbf{y}|| = \sqrt{5}$, $||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| = 4\sqrt{6}$.

Příklad 3: Určete úhel mezi dvojicemi reálných vektorů (pokud lze, určete přesný úhel, jinak uveďte jeho kosinus). Rozhodněte, jestli jde o úhel ostrý nebo tupý:

a) $\mathbf{x}^T = (1, -4)$, $\mathbf{y}^T = (8, 2)$.

V $\mathbb{R}^n$ *platí:* $\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle}{||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||}$.

$\cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *(kolmé vektory).*

b) $\mathbf{x}^T = (3, 2, -2)$, $\mathbf{y}^T = (0, 4, 1)$.

$\cos\alpha = \frac{6}{17}$, $\alpha \doteq 69^\circ$ *(ostrý úhel).*

c) $\mathbf{x}^T = (0, 0, 1)$, $\mathbf{y}^T = (1, 0, -1)$.

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ *(tupý úhel).*

d) $\mathbf{x}^T = (3, 4)$, $\mathbf{y}^T = (-1, 0)$.

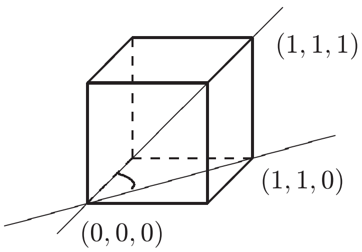
$\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\alpha \doteq 127^\circ$ *(tupý úhel).*

Příklad 4: Určete jaký úhel svírá hlavní úhlopříčka krychle s podstavou. Podobně spočítejte velikost úhlu mezi podstavou čyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajícího vrcholu. Spočítejte také velikost úhlu mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou.

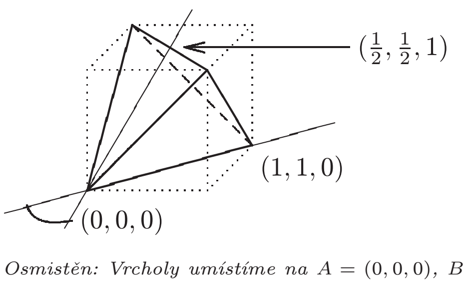
Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisí?

Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?

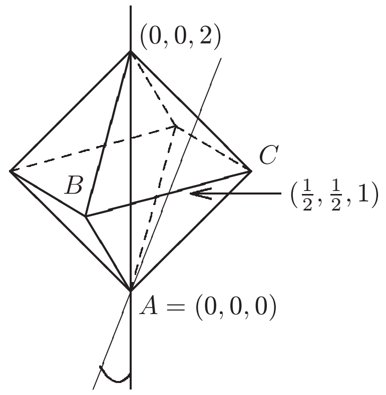
Krychle: úhel mezi úhlopříčkou $\mathbf{x}^T = (1, 1, 1)$, *a jejím průmětem do podstavy* $\mathbf{y}^T = (1, 1, 0)$ *je* $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha_1 \doteq 35^\circ$.



Čtyřstěn: Položíme-li vrcholy na body o souřadnicích $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ *a* $\mathbf{x}^T = (1,1,0)$, *vyjde nám pro průmět* $\mathbf{y}^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $\cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha_2 \doteq 55^\circ$. *Pomocí vzorečku* $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ *snadno odvodíme, že* $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.



Osmistěn: Vrcholy umístíme na $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,1,1)$, $(-1,0,1)$, $(0,-1,1)$ *a* $\mathbf{x}^T = (0,0,2)$. *Potom průmět* $\mathbf{x}$ *do stěny určené* ABC *je násobek vektoru* $\mathbf{y}^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ *a odtud* $\cos\alpha_3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha_3 \doteq 35^\circ$ *— tentýž úhel jsme spočítali u krychle.*



Výška jednotkového čtyřstěnu je rovna sinu spočteného úhlu, t.j. $\frac{\sqrt{6}}{3}$*. Sama základna má výšku* $\frac{\sqrt{3}}{2}$*, a odtud* $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

Jednotkový osmistěn se skládá z osmi trojbokých jehlanů s jednotkovým rovnostranným trojúhelníkem v podstavě, kde zbývajíici hrany jsou vzájemně kolmé a jejich délka d je rovna polovině délky úhlopříčky osmistěnu. Z kolmosti techto třech hran snadno odvodíme, že $V = \frac{4}{3}d^3$*. Zbývá tedy spočítat délku úhlopříčky, ta je ale rovna úhlopříčce jednotkového čtverce, tedy* $V = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Příklad 5: Vůči standardnímu skalárnímu součinu vyberte z následujících tří vektorů kolmé dvojice: $(1, 2, 3)$, $(5, 2, -3)$ a $(-2, -1, -4)$. Kterou z následujících vlastností má relace kolmosti: Reflexivita, ireflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita?

$(1, 2, 3) \perp (5, 2, -3)$, $(5, 2, -3) \perp (-2, -1, -4)$, *ale* $(1, 2, 3) \not\perp (-2, -1, -4)$.

Relace kolmosti tudíž není tranzitivní (ani reflexivní, pouze symetrická).

Příklad 6: Aniž byste dopočítávali integrál, ukažte, že pro libovolná $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0, r > 0$ mají funkce $f_a(x) = \sin(ax)$ a $g_b(x) = \cos(bx)$ nulový skalární součin, t.j. jsou na sebe v odpovídajícím vektorovém prostoru kolmé.

Tento součin je dán předpisem: $\langle f_a|g_b\rangle = \int_{-r}^{r} f_a(x)g_b(x)dx$.

Stačí si všimnout, že $\sin(ax)$ *je lichá funkce, zatímco* $\cos(bx)$ *je sudá. Jejich součin* $f_a(x)g_b(x)$ *je lichá funkce. Pro libovolnou lichou funkci platí, že její integrál na intervalu* $(-r, r)$ *je nulový.*

Příklad 7: Pro skalární součin $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ukažte, že funkce $1, x, 3x^2 - 1, 5x^3 - 3x$ jsou na sebe navzájem kolmé v prostoru polynomů na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

$\langle 1|x\rangle = \int_{-1}^{1} xdx = [\frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
$\langle 1|3x^2 - 1\rangle = \int_{-1}^{1}(3x^2 - 1)dx = [x^3 - x]_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$
$\langle 1|5x^3 - 3x\rangle = \int_{-1}^{1}(5x^3 - 3x)dx = [\frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$
$\langle x|3x^2 - 1\rangle = \int_{-1}^{1}(3x^3 - x)dx = [\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
$\langle x|5x^3 - 3x\rangle = \int_{-1}^{1}(5x^4 - 3x^2)dx = [x^5 - x^3]_{-1}^{1} = 0 - 0 = 0$
$\langle 3x^2 - 1|5x^3 - 3x\rangle = \int_{-1}^{1}(15x^5 - 14x^3 + 3x)dx = [\frac{15}{6}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{1} = 0$

Všimněte si, že v prvním, třetím, čtvrtém a posledním případě jsme integrovali liché funkce, takže integrál musel vyjít nulový.

Příklad 8: Mějme dva kolmé vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Dále nechť $\|\mathbf{u}\| = 12, \|\mathbf{v}\| = 5$. Určete $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

Kolmost znamená, že $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = 0$*. Dále užij rozepsání normy na skalární součin a axiomy skalárního součinu.*

Normy nám říkají, že $\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle = 144$ *a* $\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 25$*. Dále počítejme:*

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| &= \\
&= \sqrt{\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle} \\
&= \sqrt{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}|\mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle} \\
&= \sqrt{\overline{\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}} \\
&= \sqrt{\overline{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle} + \overline{\langle \mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}} \\
&= \sqrt{144+25} = 13
\end{aligned}
$$

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = 13$ $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = 13$

Příklad 9: V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r\}$ řádkového prostoru následující matice.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Odečtením projekcí spočteme nejprve kolmý vektor
$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i|\mathbf{z}_j\rangle \mathbf{z}_j$*; a ten pak normalizujeme* $\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{||\mathbf{y}_i||}$.

Normalizujeme $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$*:* $||\mathbf{y}_1|| = 2$ *a odtud* $\mathbf{z}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

$\langle \mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1\rangle = 5$ *a proto* $\mathbf{y}_2 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})^T$.
Normalizujeme $\mathbf{y}_2$*:* $||\mathbf{y}_2|| = 3$ *a dostaneme* $\mathbf{z}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

$\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1\rangle = 5,\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2\rangle = -1$ *a tedy* $\mathbf{y}_3 = (-1, -1, 1, 1)^T$.
Normalizujeme $\mathbf{y}_3$*:* $||\mathbf{y}_3|| = 2$ *a máme* $\mathbf{z}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

$Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$||\mathbf{y}_1|| = 5,\ \mathbf{z}_1 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T$
$\langle \mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1\rangle = 4,\ \mathbf{y}_2 = (0, -\frac{12}{5}, \frac{9}{5}, 0)^T$
$||\mathbf{y}_2|| = 3,\ \mathbf{z}_2 = (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T$
$\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1\rangle = \frac{3}{5},\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2\rangle = -\frac{4}{5},\ \mathbf{y}_3 = (2, 0, 0, 2)^T$
$||\mathbf{y}_3|| = 2\sqrt{2},\ \mathbf{z}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$

$Z = \{(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T\}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$||\mathbf{y}_1|| = 3,\ \mathbf{z}_1 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$
$\langle \mathbf{x}_2|\mathbf{z}_1\rangle = 6,\ \mathbf{y}_2 = (0, 3, 0, 0)^T$
$||\mathbf{y}_2|| = 3,\ \mathbf{z}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$
$\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1\rangle = 9,\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2\rangle = -5,\ \mathbf{y}_3 = (0, 0, 0, 0)^T$,
třetí řádek je kombinací předchozích, volíme tedy následující řádek $\mathbf{x}_3 = (-4, 2, 4, 2)^T$.
$\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_1\rangle = 0,\ \langle \mathbf{x}_3|\mathbf{z}_2\rangle = 2,\ \mathbf{y}_3 = (-4, 0, 4, 2)^T$
$||\mathbf{y}_3|| = 6,\ \mathbf{z}_3 = (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

$Z = \{(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, (0, 1, 0, 0)^T, (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T\}$.

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$||\mathbf{y}_1|| = 5$, $\mathbf{z}_1 = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T$
$\langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{z}_1 \rangle = -3$, $\mathbf{y}_2 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T$
$||\mathbf{y}_2|| = 1$, $\mathbf{z}_2 = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T$
$\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{z}_1 \rangle = 4$, $\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{z}_2 \rangle = -3$, $\mathbf{y}_3 = (0,0,0,0)^T$,
třetí řádek je kombinací předchozích, volíme tedy následující řádek $\mathbf{x}_3 = (1,2,3,4)^T$.
$\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{z}_1 \rangle = 4$, $\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{z}_2 \rangle = -3$, $\mathbf{y}_3 = (0,0,-1,2)^T$
$||\mathbf{y}_3|| = \sqrt{5}$, $\mathbf{z}_3 = (0,0,-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})^T$

$Z = \{(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T, (0,0,-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})^T\}$.

Příklad 10: Rozšiřte ortonormální báze z předchozího příkladu na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

a) viz matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Nejprve rozšíříme bázi řádkového prostoru na bázi $\mathbb{R}^4$. *Nejprve převedeme matici do odstupňovaného tvaru. Poté bázi rozšíříme třeba o řádky s "chybějícími" pivoty..*

Podotýkám, že jádro je ortogonálním doplňkem řádkového prostoru, t.j. rozšíření báze tvoří ortonormální bázi jádra.

Matici převedeme do odstupňovaného tvaru: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Nyní lze vzít např. $\mathbf{x}_4 = (0,0,0,1)^T$. *Přidaný vektor po normalizaci tvoří hledanou bázi jádra matice.*

Rozšiřujeme bázi $Z = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T\}$.

$\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_1 \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_2 \rangle = -\frac{1}{2}$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_3 \rangle = \frac{1}{2}$, *a tudíž* $\mathbf{y}_4 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$,

Normalizujeme $\mathbf{y}_4$: $||\mathbf{y}_4|| = \frac{1}{2}$ *a získáme* $\mathbf{z}_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

$\mathbf{z}_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

b) viz matice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$Z = \{(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)^T, (0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^T, (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

$\mathbf{x}_4 = (0,0,0,1)^T$

$\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_1 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_2 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_3 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathbf{y}_4 = (-\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})^T$

$||\mathbf{y}_4|| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathbf{z}_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

$\mathbf{z}_4 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

c) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$Z = \{(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T, (0,1,0,0)^T, (-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T\}$,

$\mathbf{x}_4 = (0,0,0,1)^T$,

$\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_1 \rangle = \frac{2}{3}$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_2 \rangle = 0$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_3 \rangle = \frac{1}{3}$, $\mathbf{y}_4 = (-\frac{2}{9}, 0, -\frac{4}{9}, \frac{4}{9})^T$,

$||\mathbf{y}_4|| = \frac{2}{3}$, $\mathbf{z}_4 = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

$\mathbf{z}_4 = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

d) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$Z = \{(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})^T, (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})^T, (0,0,-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})^T\}$,

$\mathbf{x}_4 = (0,1,0,0)^T$,

$\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_1 \rangle = \frac{4}{5}$, $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_2 \rangle = \frac{2}{5}$. $\langle \mathbf{x}_4 | \mathbf{z}_3 \rangle = 0$, $\mathbf{y}_4 = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0)^T$,

$||\mathbf{y}_4|| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\mathbf{z}_4 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0, 0)^T$.

$\mathbf{z}_4 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0, 0)^T$.

Příklad 11: Pro matice z předchozího příkladu určete ortogonální projekci $\mathbf{p}$ vektoru $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru a souřadnice této projekce $[\mathbf{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

a) viz matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Nejprve spočteme jednotlivé projekce na ortonormální bázi $Z = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$:

$\langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_1\rangle = 5$, $\langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_2\rangle = -2$, $\langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_3\rangle = 1$ $\qquad [\mathbf{p}]_Z = (5, -2, 1)^T$

Potom: $\mathbf{p} = \langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_1\rangle \mathbf{z}_1 + \langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_2\rangle \mathbf{z}_2 + \langle \mathbf{a}|\mathbf{z}_3\rangle \mathbf{z}_3$ $\qquad = (1, 3, 2, 4)^T$

$[\mathbf{p}]_Z = (5, -2, 1)^T$, $\mathbf{p} = (1, 3, 2, 4)^T$.

b) viz matice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{p}]_Z = (2, -1, \frac{7\sqrt{2}}{2})^T$, $\mathbf{p} = (\frac{7}{2}, 2, 1, \frac{7}{2})^T$.

c) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{p}]_Z = (5, 2, 1)^T$, $\mathbf{p} = (\frac{8}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{11}{3})^T$.

d) viz matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$[\mathbf{p}]_Z = (\frac{19}{5}, 5, \frac{-8}{5}, \frac{9\sqrt{5}}{5})^T$, $\mathbf{p} = (\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 1, 5)$.

Příklad 12: Určete vzdálenost bodu $A = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny procházející počátkem a body $B = (8, -1, 1, -2)^T$ a $C = (4, -2, 2, -1)^T$.

Postupujeme G-S ortonormalizací. Hledaná vzdálenost je de facto rovna normě vektoru $\mathbf{y}_3$, kde vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ odpovídají bodům B a C a vektor $\mathbf{x}_3$ bodu A.

Zde se vyplatí malý předvýpočet: vektory $\mathbf{x}_1 = (8, -1, 1, -2)^T$, $\mathbf{x}_2 = (4, -2, 2, -1)^T$ jsou lineárně nezávislé, a dokonce $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$*, kde poslední dva vektory $\mathbf{x}'_1$, $\mathbf{x}'_2$ jsou vzájemně kolmé a generují tu samou rovinu jako $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$.*

Nyní můžeme spočítat projekci vektoru $\mathbf{x}_3 = (5, 5, 3, 3)^T$:
$p(\mathbf{x}_3) = \frac{\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}'_1\rangle}{||\mathbf{x}'_1||^2}\mathbf{x}'_1 + \frac{\langle \mathbf{x}_3|\mathbf{x}'_2\rangle}{||\mathbf{x}'_2||^2}\mathbf{x}'_2 = \frac{17}{17}(4, 0, 0, -1)^T + \frac{2}{2}(0, 1, -1, 0)^T = (4, 1, -1, -1)^T$

(Použili jsme nenormalizovanou bázi, pouze ortogonální, proto se ve jmenovateli u "vytknuté" normy $||\mathbf{x}'_i||$ objevuje kvadrát, protože bychom jí poprvé normovali $\mathbf{x}'_i$ a podruhé bychom jí násobili už znormované $\mathbf{x}'_i$.)

Tím dostaneme $||A - p(A)|| = ||\mathbf{x}_3 - p(\mathbf{x}_3)|| = ||\mathbf{y}_3|| = \sqrt{1 + 16 + 16 + 16} = 7$

Příklad 13: Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

Všimněte si, že sloupce matice A jsou vzájemně kolmé.

Protože sloupce $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_3$ *jsou vzájemně kolmé, je projekce přímo dána předpisem* $\mathbf{b}_{\mathcal{R}(A)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a}_i \rangle}{||\mathbf{a}_i||^2} \mathbf{a}_i$, *tedy* $\mathbf{b}_{\mathcal{R}(A)} = (4, 8, 13, 9)^T$ *s koeficienty* $\mathbf{x}' = (3, -2, 1)^T$.