Příklady ke cvičení

Příklad 1: Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní a pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Zkuste použít větu, že $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{a} & A' \end{pmatrix}$ *je pozitivně definitní, pokud* $\alpha > 0$ *a* $A_1 = A' - \frac{1}{\alpha}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ *je pozitivně definitní.*

Pro Choleského rozklad, postupujte podle následujícího předpisu pro $k = 1, \ldots, n$*. (Uvědomte si, že algoritmus je přímočarý, víme-li, jak se má násobení* $U^T U$ *projevit v* A *) Postupně vyplňujeme řádky* U*:*

$u_{i,i} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}$ *(nevyjde-li kladné číslo, není matice pozitivně definitní)*

a pro každé i *a* $j = i+1, \ldots, n$

$u_{i,j} = \frac{1}{u_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} u_{k,i} \right)$

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *V dalším kroku dostaneme* $A_2 = (4)$ *a protože oba koeficienty* α *byly kladné, je matice* A *pozitivně definitní.*

Pro matici A *dostaneme*

$u_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{2}$

$u_{1,2} = \frac{1}{u_{1,1}}(a_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_{1,3} = \frac{1}{u_{1,1}}(a_{1,3}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0) = 0$

$u_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - u_{1,2}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$u_{2,3} = \frac{1}{u_{2,2}}(a_{2,3} - u_{1,2}u_{1,3}) = \frac{2}{\sqrt{6}}(0 - 1 \cdot 0) = 0$

$u_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - u_{1,3}^2 - u_{2,3}^2} = \sqrt{4 - 0^2 - 0^2} = 2$

Tedy A *je pozitivně definitní a* $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

B *je pozitivně definitní a* $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

C *není pozitivně definitní, je jen pozitivně semidefinitní,* $C = U^T U$ *pro* $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

D *je pozitivně definitní a* $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$

E je pozitivně definitní a $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Spočtěte Choleského rozklad matice F a použijte ho k řešení soustavy $F\mathbf{x} = (10, 21, -32, 26, 23)^T$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Provedeme dvojí zpětnou substituci pomocí $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *a získáme* $\mathbf{x} = (1, 1, -2, 0, 1)^T$.

Příklad 3: Ukažte, že pro pozitivně definitní matice A a B jsou matice $A + B$ a A^{-1} pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že A je regulární).

$\mathbf{x}^H(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} + \mathbf{x}^H B\mathbf{x} > 0$ *pro* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *má pouze triviální řešení, t.j. matice* A *je regulární a existuje* A^{-1}.

Potom pokud $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *máme* $\mathbf{x}^H A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}^H A^{-1}AA^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}^H A\mathbf{y} > 0$ *pro* $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Povšimněte si, že jsme při určení $\mathbf{y}^H$ *využili faktu* $(A^{-1})^H = (A^{-1})^H(AA^{-1}) = ((A^{-1})^H A^H)A^{-1} = (AA^{-1})^H A^{-1} = A^{-1}$.

Věc lze ukázat i s využitím věty o podobnosti. Je-li A *pozitivně definitní, potom* $A = R^H DR$ *pro unitární* R *a* $A^{-1} = R^H D^{-1} R$*, tudíž je také regulární, Hermitovská a pozitivně definitní.*

K součinu: součin symetrických matic nemusí být symetrický, stačí tedy najít dvě pozitivně definitní matice, jejichž součin není symetrický, např.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

Kdyby součin vyšel symetrický (Hermitovský), pak už bude pozitivně definitní. (Plyne ze simultánní diagonalizovatelnosti normálních matic, což přesahuje učivo 1. r. LA.)

Příklad 4: Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice

$$G = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní?

Nutně $g > 0$.

Dále musí být matice $G_1 = G' - \frac{1}{g}(1, 0)^T(1, 0) = \begin{pmatrix} g - \frac{1}{g} & 1 \\ 1 & g \end{pmatrix}$ *také pozitivně definitní, čili* $g > 1$.

V posledním kroku získáme $G_2 = G_1' - \frac{1}{g}(1)^T(1) = (g - \frac{g}{g^2-1}) = (\frac{g^3-2g}{g^2-1})$ *což je pozitivně definitní matice řádu jedna jen pro* $g > \sqrt{2}$.