Příklady ke cvičení

Příklad 1: Nechť
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
je matice bilineární formy na $\mathbb{K}^3$. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

a) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 - 2u_1v_2 + 2u_2v_1 - u_2v_3 - 2u_3v_1 + 2u_3v_2$.
$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 - 2v_1v_3 + v_2v_3$.
Stejnou formu vyjadřuje i
$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

b) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (číslo 2 v $\mathbb{Z}_2$ odpovídá 0).

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_3$.

$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 + v_2v_3$.

Symetrická matice této formy neexistuje.

c) řešte pro $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_1 + 2u_2v_3 + u_3v_1 + 2u_3v_2$.
$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v} = v_1^2 + v_1v_3 + v_2v_3$.
Stejnou formu vyjadřuje i
$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke kanonické bázi K analytické vyjádření $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2yt - t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^T$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi

$X = \{(1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T\}$.

Určete $g(u)$ pro vektor u, který má vůči bázi X souřadnice $[u]_X = (3, 1, 0, 0)^T$.

Matici B formy g vůči kanonické bázi vynásobíme z obou stran maticí přechodu od báze X ke K a dostaneme její matici vůči bázi X.

$B_X = [id]_{XK}^T \cdot B_K \cdot [id]_{XK}$, čili
$$B_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Analytické vyjádření zní: $g(u)_X = 4ab + 4ac + 6ad + 3b^2 + 6bc + 6bd + 3c^2 + 6cd + 2d^2$ pro $[u]_X = (a, b, c, d)^T$.

Dosazením $(3, 1, 0, 0)^T$ za $(a, b, c, d)^T$ zjistíme, že $g(u) = 15$. Tentýž výsledek lze odvodit, pokud si spočítáme souřadnice u vůči K, t.j. $[u]_K = (4, 4, 4, 3)^T$.

Příklad 3: Určete signaturu kvadratické formy g na $\mathbb{R}^3$, která má pro $u = (x, y, z)^T$ následující analytické vyjádření

a) $g(u) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$.

Prozkoumejte vlastní čísla matice formy.

Sestavíme matici formy $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Charakteristický mnohočlen je $p_B(t) = -t(t^2 - 3)$*, čili* B *má jedno vlastní číslo kladné* $\lambda_1 = \sqrt{3}$*, jedno nulové* $\lambda_2 = 0$ *a jedno záporné* $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

Signatura formy g *je* $(\#1, \#-1, \#0) = (1, 1, 1)$.

b) $g(u) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$.

Signatura formy g *je* $(\#1, \#-1, \#0) = (1, 0, 2)$.