Závěrečná písemka z lineární algebry

Pokuste se v rámci (časových) možností vše pečlivě odůvodnit. Používání libovolné elektroniky je zakázáno, literaturu (sešit, učebnice, ...) používat můžete. Na řešení máte 90 minut. Součet všech bodů je 40. Hodně štěstí!

(1) Určete determinant matice

$$\begin{pmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & a & & \vdots \\ a & a & a+x_3 & & a \\ \vdots & & & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a & a+x_n \end{pmatrix}.$$

8 bodů

(2) Uvažujme prostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$ všech reálných matic 2×2. Definujme na tomto prostoru skalární součin jako

$$\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = tr(\mathbf{A}\mathbf{B}^T),$$

kde $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou reálné matice 2×2. Nechť P je podprostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$ generovaný množinou

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Najděte ortonormální bázi podprostoru P. *6 bodů*

(ii) Dokažte z definice, že výše definovaný skalární součin je skutečně skalární součin. *6 bodů*

(iii) Určete projekci prvku $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ na podprostor P. *4 body*

(3) Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice $\mathbf{C}$. Je $\mathbf{C}$ diagonalizovatelná? Pokud ano, najděte matici $\mathbf{R}$ takovou, že $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{R}$ a D je diagonální. Pokud ne, dokažte.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

8 bodů

(4) Pro jaká $g \in \mathbb{R}$ je matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g & 1 & 0 \\ 1 & g & 1 \\ 0 & 1 & g \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní? *8 bodů*