1. Geometrické algoritmy

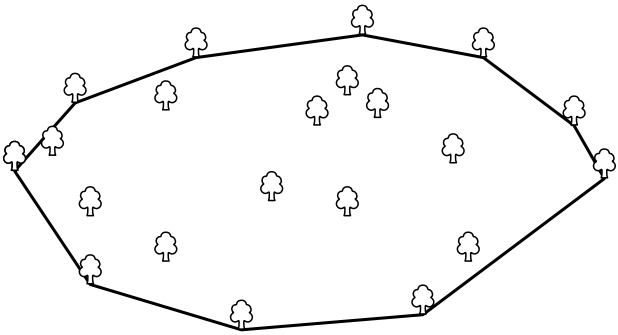
Mnoho praktických problémů má geometrickou povahu: můžeme chtít oplotit jabloňový sad nejkratším možným plotem, nalézt k dané adrese nejbližší poštovní úřadovnu, nebo třeba naplánovat trasu robota trojrozměrnou budovou.

V této kapitole ukážeme několik základních způsobů, jak geometrické algoritmy navrhovat. Soustředíme se přitom na problémy v rovině: ty jednorozměrné bývají triviální, vícerozměrné naopak mnohem náročnější.

1.1. Konvexní obal

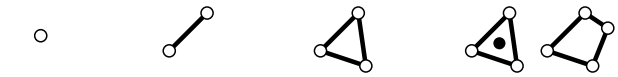
Byl jest jednou jeden jabloňový sad. Každý podzim v něm dozrávala kulaťoučká červeňoučká jablíčka, tak dobrá, že je za noci chodili otrhávat všichni tuláci z okolí. Aby alespoň část úrody vydržela do sklizně, nabízí se sad oplotit. Chceme postavit plot, který obklopí všechny jabloně a spotřebujeme na něj co nejméně pletiva.

Méně poeticky řečeno: Dostali jsme nějakou množinu n bodů v euklidovské rovině a chceme nalézt co nejkratší uzavřenou křivku, uvnitř níž leží všechny body. Geometrická intuice nám napovídá, že hledaná křivka bude konvexní mnohoúhelník, v jehož vrcholech budou některé ze zadaných bodů. Ostatní body budou ležet uvnitř mnohoúhelníka, případně na jeho hranách. Tomu se obvykle říká *konvexní obal* zadaných bodů. (Pokud se nechcete odvolávat na intuici, trochu formálnější pohled najdete ve cvičeních 4 a 5.)



Obr. 1.1: Ohrazený jabloňový sad

Pro malé počty bodů bude konvexní obal vypadat následovně:



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

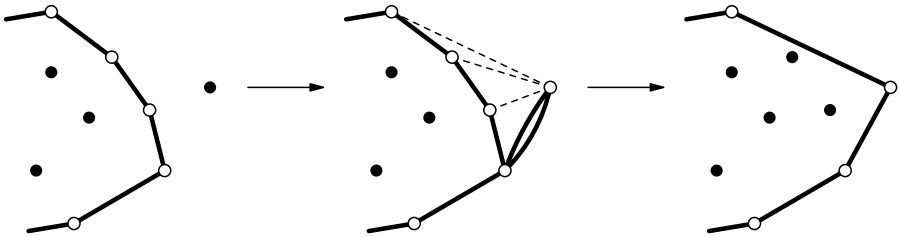
Naším úkolem tedy bude najít konvexní obal a vypsat na výstup jeho vrcholy tak, jak leží na hranici (buď po směru hodinových ručiček, nebo proti němu). Pro jednoduchost budeme konvexní obal říkat přímo tomuto seznamu vrcholů.

Prozatím budeme předpokládat, že všechny body mají různé x-ové souřadnice. Existuje tedy jednoznačně určený nejlevější a nejpravější bod a ty musí oba ležet na konvexním obalu. (Obecně se hodí geometrické problémy řešit nejdříve pro body, které jsou v nějakém vhodném smyslu *v obecné poloze,* a teprve pak se starat o speciální případy.)

Použijeme princip, kterému se obvykle říká *zametání roviny.* Budeme procházet rovinu zleva doprava („zametat ji přímkou“) a udržovat si konvexní obal těch bodů, které jsme už prošli.

Na počátku máme konvexní obal jednobodové množiny, což je samotný bod. Nechť tedy už známe konvexní obal prvních $k-1$ bodů a chceme přidat k-tý bod. Ten určitě na novém konvexním obalu bude ležet (je nejpravější), ale jeho přidání k minulému obalu může způsobit, že hranice přestane být konvexní. To lze snadno napravit – stačí z hranice odebírat body po směru a proti směru hodinových ručiček, než opět bude konvexní.

Například na následujícím obrázku nemusíme po směru hodinových ručiček odebrat ani jeden bod, obal je v pořádku. Naopak proti směru ručiček musíme odstranit dokonce dva body.



Obr. 1.2: Přidání bodu do konvexního obalu

Podle tohoto principu už snadno vytvoříme algoritmus. Aby se lépe popisoval, rozdělíme konvexní obal na *horní obálku* a *dolní obálku* – to jsou části, které vedou od nejlevějšího bodu k nejpravějšímu „horem“ a „spodem“.

Obě obálky jsou lomené čáry, navíc horní obálka pořád zatáčí doprava a dolní naopak doleva. Pro udržování bodů v obálkách stačí dva zásobníky. V k-tém kroku algoritmu přidáme k-tý bod zvlášť do horní i dolní obálky. Přidáním k-tého bodu se však může porušit směr, ve kterém obálka zatáčí. Proto budeme nejprve body z obálky odebírat a k-tý bod přidáme až ve chvíli, kdy jeho přidání směr zatáčení neporuší.

Algoritmus KonvexníObal

1. Setřídíme body podle x-ové souřadnice, označíme je $b_1, \ldots, b_n$.

2. Vložíme do horní a dolní obálky bod b_1: $H \leftarrow D \leftarrow (b_1)$.
3. Pro každý další bod $b = b_2, \ldots, b_n$:
4. Přepočítáme horní obálku:
5. Dokud $|H| \geq 2$, $H = (\ldots, h_{k-1}, h_k)$ a úhel $h_{k-1}h_kb$ je orientovaný doleva:
6. Odebereme poslední bod h_k z obálky H.
7. Přidáme bod b na konec obálky H.
8. Symetricky přepočteme dolní obálku (s orientací doprava).
9. Výsledný obal je tvořen body v obálkách H a D.

Rozebereme časovou složitost algoritmu. Setřídit body podle x-ové souřadnice dokážeme v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. Přidání dalšího bodu do obálek trvá lineárně vzhledem k počtu odebraných bodů. Zde využijeme obvyklý argument: Každý bod je odebrán nejvýše jednou, a tedy všechna odebrání trvají dohromady $\mathcal{O}(n)$. Konvexní obal dokážeme sestrojit v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ a pokud bychom měli seznam bodů již utříděný, zvládneme to dokonce v $\mathcal{O}(n)$.

Zbývá dořešit případy, kdy body nejsou v obecné poloze. Pokud se to stane, představíme si, že všemi body nepatrně pootočíme. Tím se nezmění, které body leží na konvexním obalu, a x-ové souřadnice se již budou lišit. Pořadí otočených bodů podle x-ové souřadnice přitom odpovídá lexikografickému pořadí původních bodů (nejprve podle x, pak podle y). Takže stačí v našem algoritmu vyměnit třídění podle x za lexikografické.

Orientace úhlu a determinanty

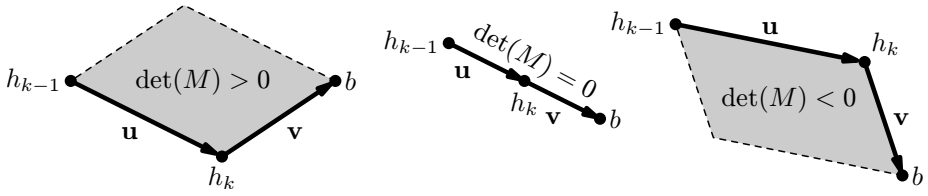
Při přepočítávání obálek jsme potřebovali testovat, zde je nějaký úhel orientovaný doleva nebo doprava. Jak na to? Ukážeme jednoduchý způsob založený na lineární algebře. Budou se k tomu hodit vlastnosti determinantu. Absolutní hodnota determinantu je objem rovnoběžnostěnu určeného řádkovými vektory matice. Důležitější však je, že znaménko determinantu určuje *orientaci* vektorů – zda je levotočivá či pravotočivá. Protože náš problém je rovinný, budeme používat determinanty matic 2×2.

Uvažme souřadnicový systém v rovině, jehož x-ová souřadnice roste směrem doprava a y-ová směrem nahoru. Chceme zjistit orientaci úhlu $h_{k-1}h_kb$. Označme $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ rozdíl souřadnic bodů h_k a h_{k-1} a podobně $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ rozdíl souřadnic bodů b a h_k. Matici M definujeme následovně:

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Úhel $h_{k-1}h_kb$ je orientován doleva, právě když $\det M = x_1y_2 - x_2y_1$ je nezáporný. Možné situace jsou nakresleny na obrázku 1.3.

Determinant přitom zvládneme spočítat v konstantním čase a pokud jsou souřadnice bodů celočíselné, vystačí si i tento výpočet s celými čísly. Poznamenejme, že k podobnému vzorci se lze také dostat přes vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.



Obr. 1.3: Jak vypadají determinanty různých znamének v rovině

Cvičení

1. Vyskytnou-li se na vstupu tři body na společné přímce, může náš algoritmus vydat konvexní obal, jehož některé vnitřní úhly jsou rovny 180 °. Definice obalu to připouští, ale někdy to může být nepraktické. Upravte algoritmus, aby takové vrcholy z obalu vynechával.
2. V rovině je dána množina červených a množina zelených bodů. Sestrojte přímku, která obě množiny oddělí. Na jedné její straně tedy budou ležet všechny červené body, zatímco na druhé všechny zelené. Navrhněte algoritmus, který takovou přímku nalezne.
3. Všimněte si, že pokud bychom netrvali na tom, aby bylo našich n jabloní oplocено jediným plotem, mohli bychom ušetřit pletivo. Sestrojte dva uzavřené ploty tak, aby každá jabloň byla oplocena a celkově jste spotřebovali nejméně pletiva.
4. Naznačíme, jak konvexní obal zavést formálně. Pamatujete si na lineární obaly ve vektorových prostorech? *Lineární obal* $\mathcal{L}(X)$ množiny vektorů X je průnik všech vektorových podprostorů, které tuto množinu obsahují. Ekvivalentně je to množina všech *lineárních kombinací* vektorů z X, tedy všech součtů tvaru $\sum_i \alpha_i x_i$, kde $x_i \in X$ a $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

   Podobně můžeme definovat *konvexní obal* $\mathcal{C}(X)$ jako průnik všech konvexních množin, které obsahují X. Konvexní je přitom taková množina, která pro každé dva body obsahuje i celou úsečku mezi nimi. Nyní uvažujme množinu všech *konvexních kombinací,* což jsou součty tvaru $\sum_i \alpha_i x_i$, kde $x_i \in X$, $\alpha_i \in [0,1]$ a $\sum_i \alpha_i = 1$.

   Jak vypadají konvexní kombinace pro 2-bodovou a 3-bodovou množinu X? Dokažte, že obecně je množina všech konvexních kombinací vždy konvexní a že je rovna $\mathcal{C}(X)$. Pro konečnou X má navíc tvar konvexního mnohoúhelníku, dokonce se to někdy používá jako jeho definice.
5.* Hledejme mezi všemi mnohoúhelníky, které obsahují danou konečnou množinu bodů, ten, který má nejmenší obvod. Dokažte, že každý takový mnohoúhelník musí být konvexní a navíc rovný konvexnímu obalu množiny. (Fyzikální analogie: do bodů zatlučeme hřebíky a natáhneme kolem nich gumičku. Ta zaujme stav o nejnižší energii, tedy nejkratší křivku. My zde nechceme zabíhat do matematické analýzy, takže se omezíme na lomené čáry.)
6. Může jít sestrojit konvexní obal rychleji než v $\Theta(n \log n)$? Nikoliv, alespoň pokud

chceme body na konvexním obalu vypisovat v pořadí, v jakém se na jeho hranici nacházejí. Ukažte, že v takovém případě můžeme pomocí konstrukce konvexního obalu třídit reálná čísla. Náš dolní odhad složitosti třídění z oddílu **??** sice na tuto situaci nelze přímo použít, ale existuje silnější (a těžší) věta, z níž plyne, že i na třídění n reálných čísel je potřeba $\Omega(n \log n)$ operací. Dále viz oddíl 1.5.

1.2. Průsečíky úseček

Nyní se zaměříme na další geometrický problém. Dostaneme n úseček a zajímá nás, které z nich se protínají a kde. Na první pohled na tom není nic zajímavého: n úseček může mít až $\Theta(n^2)$ průsečíků, takže i triviální algoritmus, který zkusí protnout každou úsečku s každou, bude optimální. V reálných situacích nicméně počet průsečíků bývá mnohem menší. Podobnou situaci jsme už potkali při vyhledávání v textu. Opět budeme hledat algoritmus, který má příznivou složitost nejen vzhledem k počtu bodů n, ale také k počtu průsečíků p.

Pro začátek zase předpokládejme, že úsečky leží v obecné poloze. To tentokrát znamená, že žádné tři úsečky se neprotínají v jednom bodě, průnikem každých dvou úseček je nejvýše jeden bod, krajní bod žádné úsečky neleží na jiné úsečce, a konečně také neexistují vodorovné úsečky.

Podobně jako u hledání konvexního obalu, i zde využijeme myšlenku zametání roviny. Budeme posouvat vodorovnou přímku odshora dolů, všímat si, jaké úsečky zrovna protínají zametací přímku a jaké mezi sebou mají průsečíky.

Namísto spojitého posouvání budeme přímkou skákat po *událostech,* což budou místa, kde se něco zajímavého děje: *začátky úseček, konce úseček* a *průsečíky úseček.* Pozice začátků a konců úseček známe předem, průsečíkové události budeme objevovat průběžně.

V každém kroku výpočtu si pamatujeme *průřez* P – posloupnost úseček zrovna proťatých zametací přímkou. Tyto úsečky máme utříděné zleva doprava. Navíc si udržujeme *kalendář* K budoucích událostí.

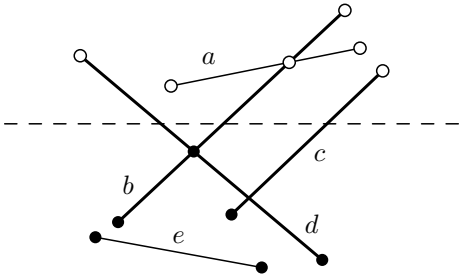
V kalendáři jsou naplánovány všechny začátky a konce ležící pod zametací přímkou. Navíc se pro každou dvojici sousedních úseček v průřezu podíváme, zda se pod zametací přímkou protnou, a pokud ano, tak takový průsečík také naplánujeme. Všimněme si, že těsně předtím, než se dvě úsečky protnou, musí v průřezu sousedit, takže na žádný průsečík nezapomeneme. Jen pozor na to, že naplánované průsečíky musíme občas z kalendáře zase vymazat – mezi dvojici sousedních úseček se může dočasně vtěsnat třetí.

Jak to vypadá, můžeme sledovat na obrázku 1.4: pro čárkovanou polohu zametací přímky leží v průřezu tučné úsečky. Kroužky odpovídají událostem: plné kroužky jsou naplánované, prázdné už nastaly. O průsečíku úseček c a d dosud nevíme, neboť se ještě nestaly sousedními.

Celý algoritmus bude vypadat následovně:

Algoritmus Průsečíky (průsečíky úseček)

1. Inicializujeme průřez P na $\emptyset$.



Obr. 1.4: Průřez a události v kalendáři

2. Do kalendáře K vložíme začátky a konce všech úseček.
3. Dokud K není prázdný:
4. Odebereme nejvyšší událost.
5. Pokud je to začátek úsečky: zatřídíme novou úsečku do P.
6. Pokud je to konec úsečky: odebereme úsečku z P.
7. Pokud je to průsečík: nahlásíme ho a prohodíme úsečky v P.
8. Přepočítáme naplánované průsečíkové události v okolí změny v P (nejvýše dvě odebereme a dvě nové přidáme).

Zbývá rozmyslet, jaké datové struktury použijeme pro reprezentaci průřezu a kalendáře. S kalendářem je to snadné, ten můžeme uložit například do haldy nebo do vyhledávacího stromu. V každém okamžiku se v kalendáři nachází nejvýše $3n$ událostí: n začátků, n konců a n průsečíků. Proto operace s kalendářem stojí $\mathcal{O}(\log n)$.

Co potřebujeme dělat s průřezem? Vkládat a odebírat úsečky a při plánování průsečíkových událostí také hledat nejbližší další úsečku vlevo či vpravo od aktuální. Nabízí se využít vyhledávací strom. Jenže jako klíče v něm nemohou vystupovat přímo x-ové souřadnice úseček, respektive jejich průsečíků se zametací přímkou. Ty se totiž při každém posunutí našeho „koštěte“ mohou všechny změnit.

Uložíme raději do vrcholů místo souřadnic jen odkazy na úsečky. Ty se nemění a mezi událostmi se nemění ani jejich pořadí. Kdykoliv pak operace se stromem navštíví nějaký vrchol, dopočítáme aktuální souřadnici úsečky a podle toho se rozhodneme, zda se vydat doleva, nebo doprava. Jelikož průřez vždy obsahuje nejvýše n úseček, operace se stromem budou trvat $\mathcal{O}(\log n)$.

Při vyhodnocování každé události provedeme $\mathcal{O}(1)$ operací s datovými strukturami, takže jednu událost zpracujeme v čase $\mathcal{O}(\log n)$. Všech $\mathcal{O}(n+p)$ událostí zpracujeme v čase $\mathcal{O}((n+p)\log n)$, což je také časová složitost celého algoritmu.

Na závěr poznamenejme, že existuje efektivnější, byť daleko komplikovanější, algoritmus od Bernarda Chazella dosahující časové složitosti $\mathcal{O}(n \log n + p)$.

Cvičení

1. Tvrdili jsme, že n úseček může mít $\Theta(n^2)$ průsečíků. Zkuste takový systém

úseček najít.

2. Popište, jak algoritmus upravit, aby nepotřeboval předpoklad obecné polohy úseček. Především je potřeba v některých případech domyslet, co vůbec má být výstupem algoritmu.
3. Navrhněte algoritmus, který nalezne nejdelší vodorovnou úsečku ležící uvnitř daného (ne nutně konvexního) mnohoúhelníku.
4. Je dána množina obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Spočítejte obsah jejich sjednocení.
5. Jak zjistit, zda dva konvexní mnohoúhelníky jsou disjunktní? Mnohoúhelníky uvažujeme včetně vnitřku. Prozradíme, že to jde v lineárním čase.
6.* Pro dané dva mnohoúhelníky vypočtěte jejich průnik (to je obecně nějaká množina mnohoúhelníků). Nebo alespoň zjistěte, zda průnik je neprázdný.
7. Mějme množinu parabol tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a > 0$. Nalezněte všechny jejich průsečíky.
8.* Co když v předchozím cvičení dovolíme i $a < 0$?

1.3. Voroného diagramy

V daleké Arktidě bydlí Eskymáci a lední medvědi.[1] A navzdory obecnému mínění se spolu přátelí. Představte si medvěda putujícího nezměrnou polární pustinou na cestě za nejbližším iglú, kam by mohl zajít na kus řeči a pár ryb. Proto se medvědovi hodí mít po ruce Voroného diagram Arktidy.

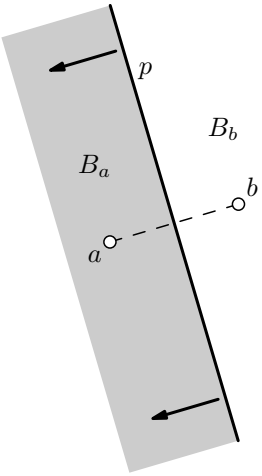
Definice: *Voroného diagram*[2] pro množinu bodů neboli *míst* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ je systém *oblastí* $B_1, \ldots, B_n \subseteq \mathbb{R}^2$, kde B_i obsahuje ty body roviny, jejichž vzdálenost od x_i je menší nebo rovna vzdálenostem od všech ostatních x_j.

Nahlédneme, že Voroného diagram má překvapivě jednoduchou strukturu. Nejprve uvažme, jak budou vypadat oblasti B_a a B_b pro dva body a a b (viz obrázek 1.5). Všechny body stejně vzdálené od a i b leží na přímce p – ose úsečky ab. Oblasti B_a a B_b jsou tedy tvořeny polorovinami ohraničenými osou p. Osa sama leží v obou oblastech.

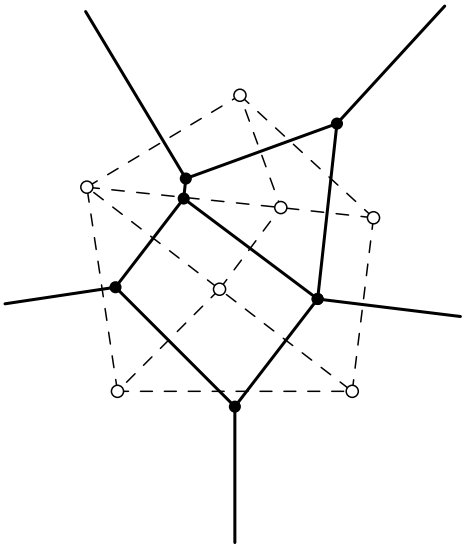
Nyní obecněji: Oblast B_i má obsahovat body, které mají k x_i blíže než k ostatním bodům. Musí být tedy tvořena průnikem $n - 1$ polorovin, takže je to (možná neomezený) konvexní mnohoúhelník. Příklad Voroného diagramu najdete na obrázku 1.6: zadaná místa jsou označena prázdnými kroužky, hranice oblastí B_i jsou vyznačeny plnými čarami.

[1] Ostatně, Arktida se podle medvědů (řecky ἄρκτος) přímo jmenuje. Jen ne podle těch ledních, nýbrž nebeských: daleko na severu se souhvězdí Velké medvědice vyjímá přímo v nadhlavníku.

[2] Diagramy tohoto druhu zkoumal začátkem 20. století ruský matematik Georgij Voronoj. Dvojrozměrnou verzi nicméně znal už René Descartes v 17. století.



Obr. 1.5: Body bližší k a než b



Obr. 1.6: Voroného diagram

Voroného diagram připomíná rovinný graf. Jeho vrcholy jsou body, které jsou stejně vzdálené od alespoň tří zadaných míst. Jeho stěny jsou oblasti B_i. Hrany jsou tvořeny částmi hranice mezi dvěma oblastmi – těmi body, které mají obě oblasti společné (to může být úsečka, polopřímka nebo přímka). Oproti rovinnému grafu nemusí stěny být omezené, ale pokud nám to vadí, můžeme celý diagram uzavřít do dostatečně velkého obdélníku.

Můžeme také sestrojit duální graf: jeho vrcholy budou odpovídat oblastem (nakreslíme je do jednotlivých míst), stěny vrcholům diagramu a hrany budou úsečky spojující místa v sousedních oblastech (přerušované čáry na obrázku).

Lemma: Voroného diagram má lineární kombinatorickou složitost. Tím myslíme, že diagram pro n míst obsahuje $\mathcal{O}(n)$ vrcholů, hran i stěn.

Důkaz: Využijeme následující standardní tvrzení o rovinných grafech [**?**]:

> **Fakt:** Mějme souvislý rovinný graf bez násobných hran. Označme $v \geq 3$ počet jeho vrcholů, e počet hran a f počet stěn. Pak platí:
>
> - $e \leq 3v - 6$
> - $v + f = e + 2$ (Eulerova formule)

Diagram pro n míst má n oblastí, takže po „zavření do krabičky“ vznikne rovinný graf o $f = n + 1$ stěnách (z toho jedna vnější). Jeho duál má $v' = f$ vrcholů a nejsou v něm násobné hrany (rozmyslete si, proč). Proto pro jeho počet hran musí platit $e' \leq 3v' - 6$. Hrany duálu nicméně odpovídají hranám původního grafu, kde tedy platí $e \leq 3f - 6 = 3n - 3$. Počet vrcholů odhadneme dosazením do Eulerovy formule: $v = e + 2 - f \leq (3n - 3) + 2 - (n + 1) = 2n - 2$. □

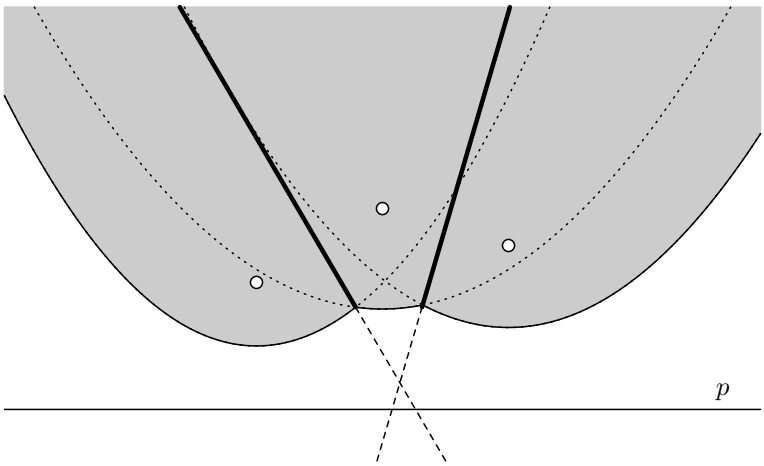
Voroného diagram pro n zadaných míst je tedy velký $\mathcal{O}(n)$. Nyní ukážeme, jak ho zkonstruovat v čase $\mathcal{O}(n \log n)$.

Fortunův algoritmus*

Situaci si zjednodušíme předpokladem obecné polohy: budeme očekávat, že žádné čtyři body neleží na společné kružnici. Vrcholy diagramu proto budou mít stupeň nejvýše 3.

Použijeme osvědčenou strategii zametání roviny přímkou shora dolů. Obvyklá představa, že nad přímkou už máme vše hotové, ovšem selže: Pokud přímka narazí na nové místo, hotová část diagramu nad přímkou se může poměrně složitě změnit. Pomůžeme si tak, že nebudeme považovat za hotovou celou oblast nad zametací přímkou, nýbrž jen tu její část, která má blíž k některému z míst nad přímkou než ke přímce. V této části se už to, co jsme sestrojili, nemůže přidáváním dalších bodů změnit.

Jak vypadá hranice hotové části? Body mající stejnou vzdálenost od bodu (ohniska) jako od řídicí přímky tvoří parabolu. Hranice tudíž musí být tvořena posloupností parabolických oblouků. Krajní dva oblouky jdou do nekonečna, ostatní jsou konečné. Vzhledem k charakteristickému tvaru budeme hranici říkat *pobřeží.*

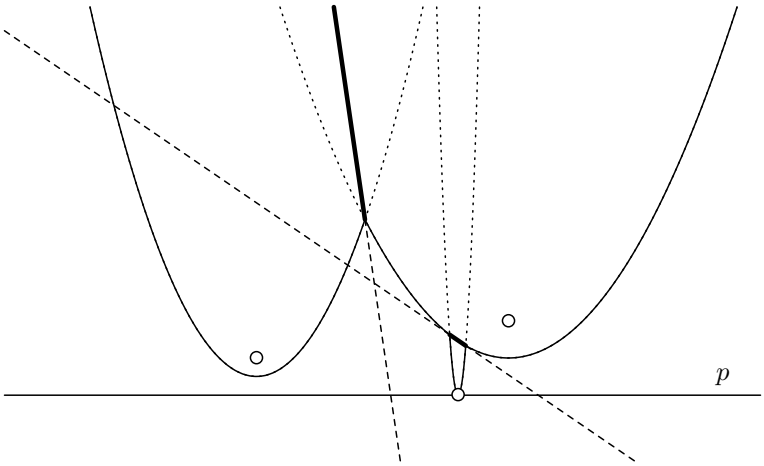


Obr. 1.7: Linie pobřeží ohraničuje
šedou oblast, v níž je diagram hotov

Posouváme-li zametací přímkou, pobřeží se mění a průsečíky oblouků vykreslují hrany diagramu. Pro každý průsečík totiž platí, že je vzdálený od zametací přímky stejně jako od dvou různých míst. Tím pádem leží na hraně diagramu oddělující tato dvě místa.

Kdykoliv zametací přímka narazí na nějaké další místo, vznikne nová parabola, zprvu degenerovaná do polopřímky kolmé na zametací přímku. Této situaci

říkáme *místní událost* a vidíme ji na obrázku 1.8. Pokračujeme-li v zametání, nová parabola se začne rozevírat a její průsečíky s původním pobřežím vykreslují novou hranu diagramu. Hrana se přitom rozšiřuje na obě strany a teprve časem se propojí s ostatními hranami.



Obr. 1.8: Krátce po místní události: přibyla nová parabola, její průsečíky kreslí tutéž hranu diagramu do obou stran

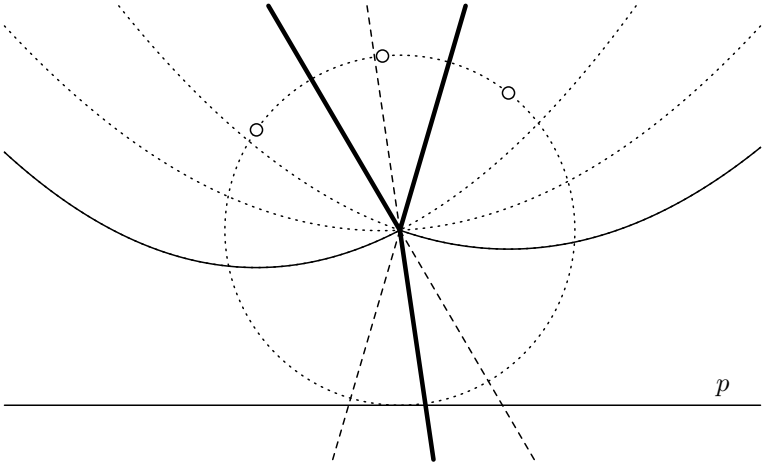
Mimo to se může stát, že nějaká parabola se rozevře natolik, že pohltí jiné a ty zmizí z pobřežní linie. Situaci sledujme na obrázku 1.9. Mějme nějaké tři paraboly jdoucí v pobřeží po sobě. Prostřední z nich je pohlcena v okamžiku, kdy se hrany vykreslované průsečíky parabol setkají v jednom bodě. Tento bod musí být stejně daleko od všech třech ohnisek, takže je středem kružnice opsané trojici ohnisek.

Kde je v tomto okamžiku zametací přímka? Musí být v takové poloze, aby střed kružnice právě vykoukl zpoza pobřeží. Jinými slovy musí být stejně daleko od středu, jako jsou ohniska, čili se kružnice dotýkat zespodu. Této situaci říkáme *kružnicová událost*.

Algoritmus proto bude udržovat nějaký kalendář událostí a vždy skákat zametací přímkou na následující událost. Místní události můžeme všechny naplánovat dopředu, kružnicové budeme plánovat (a přeplánovávat) průběžně, kdykoliv se pobřeží změní.

To je podobné algoritmu na průsečíky úseček a stejně tak budou podobné i datové struktury: kalendář si budeme uchovávat v haldě nebo vyhledávacím stromu, pobřeží ve vyhledávacím stromu s implicitními klíči: v každém vrcholu si uložíme ohniska dvou parabol, jejichž průsečíkem má vrchol být.

Poslední datovou strukturou bude samotný diagram, reprezentovaný grafem se souřadnicemi a vazbami hran na průsečíky v pobřeží.



Obr. 1.9: Kružnicová událost: parabola se schovává pod dvě sousední, dvě hrany zanikají a jedna nová vzniká

Algoritmus FORTUNE

1. Vytvoříme kalendář K a vložíme do něj všechny místní události.
2. Založíme prázdnou pobřežní linii P.
3. Dokud kalendář není prázdný:
4. Odebereme další událost.
5. Je-li to místní událost:
6. Najdeme v P parabolu podle x-ové souřadnice místa.
7. Rozdělíme ji a mezi její části vložíme novou parabolu.
8. Do diagramu zaznamenáme novou hranu, která zatím není nikam připojena.
9. Je-li to kružnicová událost:
10. Smažeme parabolu z P.
11. Do diagramu zaznamenáme vrchol, v němž dvě hrany končí a jedna začíná.
12. Po změně pobřeží přepočítáme kružnicové události ($\mathcal{O}(1)$ jich zanikne, $\mathcal{O}(1)$ vznikne).

Věta: Fortunův algoritmus pracuje v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ a prostoru $\mathcal{O}(n)$.

Důkaz: Celkově nastane n místních událostí (na každé místo narazíme právě jednou) a n kružnicových (kružnicová událost smaže jednu parabolu z pobřeží a ty přibývají pouze při místních událostech). Z toho plyne, že kalendář i pobřežní linie jsou velké $\mathcal{O}(n)$, takže pracují v čase $\mathcal{O}(\log n)$ na operaci. Jednu událost proto naplánujeme i obsloužíme v čase $\mathcal{O}(\log n)$, což celkem dává $\mathcal{O}(n \log n)$. □

Cvičení

1. Dokažte, že sestrojíme-li konvexní obal množiny míst, prochází každou jeho hranou právě jedna nekonečná hrana Voroného diagramu.
2. Vymyslete, jak algoritmus upravit, aby nepotřeboval předpoklad obecné polohy.
3.* *Navigace robota:* Mějme kruhového robota, který se pohybuje mezi bodovými překážkami v rovině. Jak zjistit, zda se robot může dostat z jednoho místa na druhé? Rozmyslete si, že stačí uvažovat cesty po hranách Voroného diagramu. Jen je potřeba dořešit, jak se z počátečního bodu dostat na diagram a na konci zase zpět.
4.* *Delaunayova triangulace* (popsal ji Boris Děloné, ale jeho jméno obvykle potkáváme v pofrancouzštěné podobě) je duálním grafem Voroného diagramu, na obrázku 1.6 je vyznačena čárkovaně. Vznikne tak, že spojíme úsečkami místa, jejichž oblasti ve Voroného diagramu sousedí. Dokažte, ze žádné dvě vybrané úsečky se nekříží a že pokud žádná čtyři místa neleží na společné kružnici, jedná se o rozklad vnitřku konvexního obalu míst na trojúhelníky. Může se hodit, že úsečka mezi místy a a b je vybraná právě tehdy, když kružnice s průměrem ab neobsahuje žádná další místa.
5.* *Euklidovská minimální kostra:* Představte si, že chceme pospojovat zadaná místa systémem úseček tak, aby se dalo dostat odkudkoliv kamkoliv a celková délka úseček byla nejmenší možná. Hledáme tedy minimální kostru úplného grafu, jehož vrcholy jsou místa a délky hran odpovídají euklidovským vzdálenostem. Můžeme použít libovolný algoritmus z kapitoly **??**, ale musíme zpracovat kvadraticky mnoho hran. Dokažte, že hledaná kostra je podgrafem Delaunayovy triangulace, takže stačí zkoumat lineárně mnoho hran.
6.** *Obecnější Voroného diagram:* Jak by to dopadlo, kdyby místa nebyla jen bodová, ale mohly by to být i úsečky? Dokažte, že v takovém případě diagram opět tvoří rovinný graf, ovšem jeho hrany jsou kromě úseček tvořeny i parabolickými oblouky. Dokázali byste upravit Fortunův algoritmus, aby fungoval i pro tyto diagramy?

1.4. Lokalizace bodu

Pokračujme v problému z minulého oddílu. Máme nějakou množinu *míst* v rovině a chceme umět pro libovolný bod nalézt nejbližší místo (pokud jich je víc, stačí libovolné jedno). To už umíme převést na nalezení oblasti ve Voroného diagramu, do které zadaný bod padne.

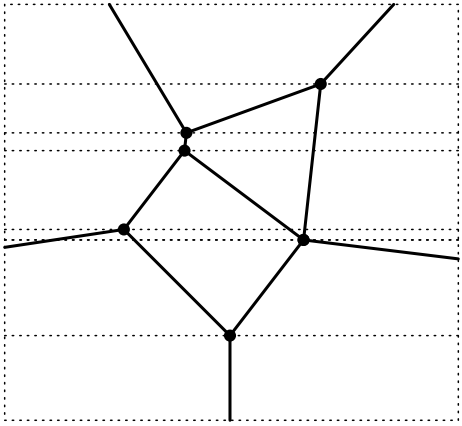
Chceme tedy pro nějaký rozklad roviny na mnohoúhelníkové oblasti vybudovat datovou strukturu, která pro libovolný bod rychle odpoví, do jaké oblasti patří. Tomuto problému se říká *lokalizace bodu.*

Začneme primitivním řešením bez předzpracování. Rovinu zametáme shora dolů vodorovnou přímkou, podobně jako při hledání průsečíků úseček. Udržujeme si průřez hranic oblastí zametací přímkou. Tento průřez se mění jenom ve vrcholech

mnohoúhelníků. Ve chvíli, kdy narazíme na hledaný bod, podíváme se, do kterého intervalu mezi hranicemi v průřezu patří. Tento interval odpovídá jedné oblasti, kterou nahlásíme. Kalendář událostí i průřez opět ukládáme do vyhledávacích stromů, jednu událost obsloužíme v $\mathcal{O}(\log n)$ a celý algoritmus běží v $\mathcal{O}(n \log n)$.

To je obludně pomalé, dokonce pomalejší než pokaždé projít všechny oblasti a pro každou zjistit, zda v ní zadaný bod leží. Ale i z ošklivé housenky se může vyklubat krásný motýl ...

Zavedeme předzpracování. Zametání oblastí necháme běžet „naprázdno“, aniž bychom hledali konkrétní bod. Rovinu rozřežeme polohami zametací přímky při jednotlivých událostech na pásy. Pro každý pás si zapamatujeme kopii průřezu (ten se uvnitř pásu nemění) a navíc si uložíme y-ové souřadnice hranic pásů. Nyní na vyhodnocení dotazu stačí najít podle y-ové souřadnice správný pás (což jistě zvládneme v logaritmickém čase) a poté položit dotaz na zapamatovaný průřez pro tento pás.



Obr. 1.10: Oblasti rozřezané na pásy

Dotaz dokážeme zodpovědět v čase $\mathcal{O}(\log n)$, ovšem předvýpočet vyžaduje čas $\Theta(n^2)$ na zkopírování všech n stromů a spotřebuje na to stejné množství prostoru.

Persistentní vyhledávací stromy

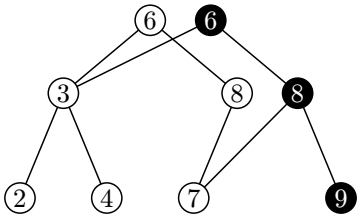
Složitost předvýpočtu zachráníme tím, že si pořídíme *persistentní vyhledávací strom.* Ten si pamatuje historii všech svých změn a umí vyhledávat nejen v aktuálním stavu, ale i ve všech stavech z minulosti. Přesněji řečeno, po každé operaci, která mění stav stromu, vznikne nová *verze* stromu a operace pro dotazy dostanou jako další parametr identifikátor verze, ve které mají hledat.

Předvýpočet tedy bude udržovat průřez v persistentním stromu a místo aby ho v každém pásu zkopíroval, jen si zapamatuje identifikátor verze, která k pásu patří.

Popíšeme jednu z možných konstrukcí persistentního stromu. Uvažujme obyčejný vyhledávací strom, řekněme AVL strom. Rozhodneme se ale, že jeho vrcholy

nikdy nebudeme měnit, abychom neporušili zaznamenanou historii. Místo toho si pořídíme kopii vrcholu a tu změníme. Musíme ovšem změnit ukazatel na daný vrchol, aby ukazoval na kopii. Proto zkopírujeme i otce a upravíme v něm ukazatel. Tím pádem musíme upravit i ukazatel na otce, atd., až se dostaneme do kořene. Kopie kořene se pak stane identifikátorem nové verze.

Strom nové verze tedy obsahuje novou cestu mezi kořenem a upravovaným vrcholem. Tato cesta se odkazuje na podstromy z minulé verze. Uchování jedné verze nás proto strojí čas $\mathcal{O}(\log n)$ a prostor taktéž $\mathcal{O}(\log n)$. Ještě nesmíme zapomenout, že po každé operaci následuje vyvážení stromu. To ovšem upravuje pouze vrcholy, které leží v konstantní vzdálenosti od cesty mezi místem úpravy a kořenem, takže jejich zkopírováním časovou ani prostorou složitost nezhoršíme.



Obr. 1.11: Vložení prvku 9 do persistentního stromu

Na předzpracování Voroného diagramu a vytvoření persistentního stromu tedy spotřebujeme čas $\mathcal{O}(n \log n)$. Strom spotřebuje paměť $\mathcal{O}(n \log n)$. Dotazy vyřizujeme v čase $\mathcal{O}(\log n)$, neboť nejprve vyhledáme správný pás a poté položíme dotaz na příslušnou verzi stromu.

Poznámka: Persistence datových struktur je přirozená pro striktní funkcionální programovací jazyky (například Haskell). V nich neexistují vedlejší efekty příkazů, takže jednou sestrojená data již nelze modifikovat, pouze vyrobit novou verzi datové struktury s provedenou změnou.

Persistence v konstantním prostoru na verzi*

Spotřeba paměti $\Theta(\log n)$ na uložení jedné verze je zbytečně vysoká. Existuje o něco chytřejší konstrukce persistentního stromu, které stačí konstantní paměť, tedy alespoň amortizovaně. Nastíníme, jak funguje.

Nejprve si pořídíme vyhledávací strom, který při každém vložení nebo smazání prvku provede jen amortizovaně konstantní počet *strukturálních změn* (to jsou změny hodnot a ukazatelů, zkrátka všeho, podle čeho se řídí vyhledávání, a co je tudíž potřeba verzovat; změna znaménka uloženého ve vrcholu AVL-stromu tedy strukturální není). Tuto vlastnost mají třeba (2,4)-stromy (viz cvičení **??**) nebo některé varianty červeno-černých stromů.

Nyní ukážeme, jak jednu strukturální změnu zaznamenat v amortizovaně konstantním prostoru. Každý vrchol stromu si tentokrát bude pamatovat až dvě své

verze (spolu s časy jejich vzniku). Při průchodu od kořene porovnáme čas vzniku těchto verzí s aktuálním časem a vybereme si správnou verzi. Pokud potřebujeme zaznamenat novou verzi vrcholu, buďto na ni ve vrcholu ještě je místo, nebo není a v takovém případě vrchol zkopírujeme, což vynutí změnu ukazatele v rodiči, a tedy i vytvoření nové verze rodiče, atd. až případně do kořene. Identifikátorem verze celé datové struktury bude ukazatel na aktuální kopii kořene spolu s časem vzniku verze.

Chod struktury si můžeme představovat tak, že stejně jako v předchozí verzi persistentních stromů propagujeme změny směrem ke kořeni, ale tentokrát se tempo propagování exponenciálně zmenšuje: Změna vrcholu způsobí zkopírování, a tím pádem změnu otce, průměrně v každém druhém případě. Počet všech změn tedy tvoří geometrickou řadu s konstantním součtem. Exaktněji řečeno:

Věta: Uchování jedné strukturální změny stojí amortizovaně konstantní čas i prostor.

Důkaz: Každé vytvoření verze vrcholu stojí konstantní čas a prostor. Jedna operace může v nejhorším případě způsobit vznik nových verzí všech vrcholů až do kořene, ale jednoduchým potenciálovým argumentem lze dokázat, že počet všech vzniklých verzí bude amortizovaně konstantní.

Potenciál struktury definujeme jako počet verzí uchovaných ve všech vrcholech dosažitelných z aktuálního kořene v aktuálním čase. V klidovém stavu struktury jsou ve vrcholu nejvýš dvě verze, během aktualizace dočasně připustíme tři verze.

Strukturální změna způsobí zaznamenání nové verze jednoho vrcholu, což potenciál zvýší o 1, ale možná tím vznikne „tříverzový“ vrchol. Zbytek algoritmu se tříverzových vrcholů snaží zbavit: pokaždé vezme vrchol se 3 verzemi, vytvoří jeho kopii s 1 verzí a upraví ukazatel v otci, čímž přibude nová verze otce. Originálnímu vrcholu zůstanou 2 verze, ale přestane být dosažitelný, takže se už do potenciálu nepočítá.

Potenciál tím klesne o 3 (za odpojený originál), zvýší se o 1 (za nově vytvořenou kopii s jednou verzí) a poté ještě o 1 (za novou verzi otce). Celkově tedy klesne o 1. Proto veškeré kopírování vrcholů zaplatíme z konstantního příspěvku od každé strukturální změny. □

Důsledek: Existuje persistentní vyhledávací strom s časem amortizovaně $\mathcal{O}(\log n)$ na operaci a prostorem amortizovaně $\mathcal{O}(1)$ na uložení jedné verze. Pomocí něj lze v čase $\mathcal{O}(n \log n)$ vybudovat datovou strukturu pro lokalizaci bodu, která odpovídá na dotazy v čase $\mathcal{O}(\log n)$ a zabere prostor $\mathcal{O}(n)$.

1.5.* Rychlejší algoritmus na konvexní obal

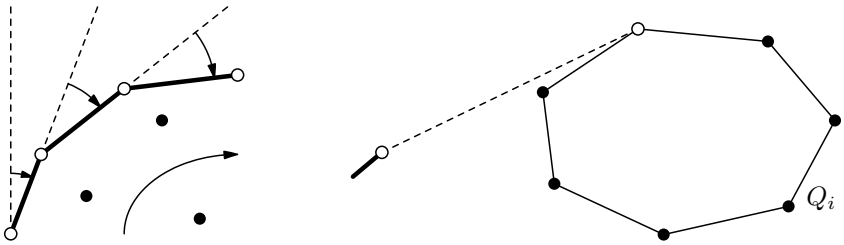
Konvexním obalem naše putování po geometrických algoritmech začalo a také jím skončí. Našli jsme algoritmus pro výpočet konvexního obalu n bodů v čase $\Theta(n \log n)$. Ve cvičení 1.1.6 jsme dokonce dokázali, že tato časová složitost je optimální. Přesto předvedeme ještě rychlejší algoritmus objevený v roce 1996 Timothym

Chanem. S naším důkazem optimality je nicméně všechno v pořádku: časová složitost Chanova algoritmu dosahuje $\mathcal{O}(n \log h)$, kde h značí počet bodů ležících na konvexním obalu.

Předpokládejme, že bychom znali velikost konvexního obalu h. Body libovolně rozdělíme do $\lceil n/h \rceil$ množin $Q_1, \ldots, Q_k$ tak, aby v každé množině bylo nejvýše h bodů. Pro každou z těchto množin nalezneme konvexní obal pomocí obvyklého algoritmu. To dokážeme pro jednu množinu v čase $\mathcal{O}(h \log h)$ a pro všechny v $\mathcal{O}(n \log h)$. Poté tyto předpočítané obaly slepíme do jednoho pomocí takzvaného *provázkového algoritmu.* Ten se opírá o následující pozorování:

Pozorování: Úsečka spojující dva body a a b leží na konvexním obalu, právě když všechny ostatní body leží na téže straně přímky proložené touto úsečkou.

Algoritmu se říká provázkový, protože svou činností připomíná namotávání provázku podél konvexního obalu. Začneme bodem, který na konvexním obalu určitě leží – třeba tím nejlevějším. V každém dalším kroku nalezneme následující bod po obvodu konvexního obalu. Například tak, že projdeme všechny body a vybereme ten, který svírá nejmenší úhel s předchozí stranou konvexního obalu. Nově přidaná úsečka vyhovuje pozorování, a tudíž do konvexního obalu patří. Po h krocích se dostaneme zpět k nejlevějšímu bodu a výpočet ukončíme. V každém kroku potřebujeme projít všechny body a vybrat následníka, což dokážeme v čase $\mathcal{O}(n)$. Celková složitost algoritmu je tedy $\mathcal{O}(nh)$.



Obr. 1.12: Provázkový algoritmus
a jeho použití v předpočítaném obalu

Provázkový algoritmus funguje, ale je ukrutně pomalý. Kýženého zrychlení dosáhneme, pokud použijeme předpočítané konvexní obaly. Ty umožní rychleji hledat následníka. Pro každou z množin Q_i najdeme zvlášť kandidáta a poté z nich vybereme toho nejlepšího. Možný kandidát vždy leží na konvexním obalu množiny Q_i. Využijeme toho, že body obalu jsou „uspořádané“, i když trochu netypicky do kruhu. Kandidáta můžeme hledat metodou půlení intervalu, jen detaily jsou maličko složitější, než je obvyklé. Jak půlit, zjistíme podle směru zatáčení konvexního obalu. Zbytek ponechme jako cvičení.

Časová složitost půlení je $\mathcal{O}(\log h)$ pro jednu množinu. Množin je $\mathcal{O}(n/h)$, tedy následující bod konvexního obalu nalezneme v čase $\mathcal{O}(n/h \cdot \log h)$. Všech n bodů obalu nalezneme ve slibovaném čase $\mathcal{O}(n \log h)$.

Popsanému algoritmu schází jedna důležitá věc: Ve skutečnosti málokdy známe velikost h. Budeme proto algoritmus iterovat s rostoucí hodnotou h, dokud konvexní obal nesestrojíme. Pokud při slepování konvexních obalů zjistíme, že konvexní obal je větší než h, výpočet ukončíme. Zbývá ještě zvolit, jak rychle má h růst. Pokud by rostlo moc pomalu, budeme počítat zbytečně mnoho fází, naopak při rychlém růstu by nás poslední fáze mohla stát příliš mnoho.

V k-té fázi položíme $h = 2^{2^k}$. Dostáváme celkovou složitost algoritmu:

$$\sum_{m=0}^{\lceil \log \log h \rceil} \mathcal{O}(n \log 2^{2^m}) = \sum_{m=0}^{\lceil \log \log h \rceil} \mathcal{O}(n \cdot 2^m) = \mathcal{O}(n \log h),$$

kde poslední rovnost dostaneme jako součet prvních $\lceil \log \log h \rceil$ členů geometrické řady $\sum_m 2^m$.

Cvičení

1. Domyslete detaily hledání kandidáta „kruhovým“ půlením intervalu.

1.6. Další cvičení

1. Navrhněte algoritmus pro výpočet obsahu konvexního mnohoúhelníku. Mnohoúhelník je zadán seznamem souřadnic vrcholů tak, jak jdou po obvodu ve směru hodinových ručiček.

2.* Navrhněte algoritmus pro výpočet obsahu nekonvexního mnohoúhelníku. Prozradíme, že to jde v lineárním čase.

3. Jak o množině bodů v rovině zjistit, zda je středově symetrická?

4.* Je dána množina bodů v rovině. Rozložte ji na dvě disjunktní středově symetrické množiny, je-li to možné.

5. Jak k dané množině bodů v rovině najít obdélník s nejmenším možným obvodem, který obsahuje všechny dané body? Obdélník nemusí mít strany rovnoběžné s osami.

6. Vymyslete datovou strukturu, která bude udržovat konvexní obal množiny bodů a bude ho umět rychle přepočítat po přidání bodu do množiny.

7. Je dána množina obdélníků, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Vybudujte datovou strukturu, která bude umět rychle odpovídat na dotazy typu „v kolika obdélnících leží zadaný bod?“.