

Cvičení z Diskrétní matematiky pro diskrétní matematiky

(Zaskakuje Martin Böhm.)

Příklad 0

(Počítací rozcvička.)

Mějme mřížku $3 \times n$. Kolik existuje cest, tedy posloupností tahů "nahoru, doprava, dolů, doleva" takových, že každá začíná v levém dolním rohu, končí v pravém horním rohu a každým políčkem prochází právě jednou?

Nápověda: Použijte indukci, respektive rekurenci – převod na menší příklad téhož. Zkuste si spočítat počet cest pro malé případy, tipněte si vzorec a pak ho dokažte indukcí.

Nápověda 2: Všimněte si, že ať chceme nebo ne, tak při každém průchodu mřížkou musíme projít z prostředního políčka nejspodnější úrovně (napravo od levého rohu) do pravého dolního rohu a vždy to musí být tímto směrem, nikdy naopak. (Dokáže se to rozbořením případů a díky tomu, že na každé políčko musíme šlápnout právě jednou a skončit vpravo nahoře.) Co to znamená pro situace, kdy jsme o úroveň výše nebo na startu?

Příklad 1

Dokažte, že pro systém všech podmnožin neprázdné množiny X (značený 2^X) platí, že má stejně podmnožin liché velikosti jako sudé velikosti.

Příklad 2

Kolik je symetrických relací na n -prvkové množině? Kolik je antisymetrických relací na n -prvkové množině?

Příklad 3

Nalezněte relace R, S takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 4

Nalezněte relaci R takovou, že $\forall n : R^n \neq R^{n+1}$.

Příklad 5

Kolik je uspořádaných dvojic (A, B) takových, že $A \subseteq B \subseteq X, |X| = n$?