

Úkoly z diskrétní matematiky, 5. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

- (5.1) Kolik je všech regulárních matic tvaru $n \times n$ nad tělesem \mathbb{Z}_p ? *5 bodů*
- (5.2) Odvoďte vzorec pro součet $\sum_{i=1}^n i^3$. Skutečně ho odvoďte, tedy ne že ho jen najdete v nějaké encyklopedii a dokážete třeba indukcí. Hint: inspirujte se odvozením vzorce pro součet čtverců. *5 bodů*
- (5.3) Mějme $x \in \mathbb{R}$ libovolné takové, že výraz $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokažte, že potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je výraz $x^n + \frac{1}{x^n}$ také celé číslo. *5 bodů*
- (5.4) Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ výraz $(k!)^n$ dělí $(kn)!$. *5 bodů*