Úkoly z diskrétní matematiky, 9. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(9.1) Rozhodněte (a vaše tvrzení dokažte) pro každou kombinaci čísel $n, k \in \mathbb{N}$, zda existuje či neexistuje k-regulární graf na n vrcholech. *5 bodů*

(9.2) Dokažte, že každý graf G má *skorovyváženou orientaci.* To znamená, že každou hranu $e \in E(G)$ zorientujeme tak, že ve výsledku se pro každý vrchol $v \in V(G)$ výstupní stupeň $\deg_G^-(v)$ (tedy počet hran co z v vychází) liší od vstupního stupně $\deg_G^+(v)$ (počet hran co do v vchází) nejvýše o jedna. *4 body*

(9.3) Nechť T je strom. Dokažte, že T má aspoň $\Delta(T)$ listů. (Symbol $\Delta(G)$ značí maximální stupeň grafu G.) *3 body*

(9.4) Dokažte, že v každém grafu G existuje cesta délky $\delta(G)$. (Symbol $\delta(G)$ značí minimální stupeň grafu G.) *2 body*

(9.5) Dokažte, že v každém grafu G s $\delta(G) \geq 2$ existuje kružnice délky alespoň $\delta(G) + 1$. *3 body*

(9.6) Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dokažte, že posloupnost celých čísel $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je skóre nějakého stromu, právě tehdy když $d_i > 0$ pro $i = 1, \ldots, n$ a platí $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *4 body*

(9.7) Dokažte, že pro barevnost libovolného grafu G platí

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

3 body

(9.8) Devatenáct rodin si navzájem posílá novoroční přání, každá rodina jich rozešle devět ostatním (různým) rodinám. Dokažte, že existuje rodina, která dostala přání od rodiny, které sama nepřála. *3 body*

(9.9) Nechť G je rovinný graf, jehož všechny stupně jsou alespoň 5. Dokažte, že G nutně musí mít alespoň 12 vrcholů. *3 body*