Příklady ke cvičení

Příklad 1: Určete rovnici přímky π v parametrickém tvaru $(x,y) = (x_0, y_0) + t(p,q)$, v obecném tvaru $ax + by + c = 0$, ve úsekovém tvaru $\frac{x}{g} + \frac{y}{h} = 1$ a ve směrnicovém tvaru $y = kx + l$, která prochází body A a B o daných souřadnicích.

Uvažte, zdali jsou koeficienty jednoznačné.

a) $A = (1,2)$ a $B = (3,4)$

b) $A = (1,-1)$ a $B = (2,2)$

c) $A = (0,1)$ a $B = (4,3)$

d) $A = (0,3)$ a $B = (-2,3)$

Příklad 2: Najděte rovnici přímky π, její úsek mezi osami je rozdělen bodem $A = (2,6)$ na dvě části v poměru 1:2.

Příklad 3: Proložte parabolu $y = ax^2 + bx + c$ body:

a) $(-1,-9)$, $(1,-3)$ a $(2,3)$

b) $(-1,0)$, $(1,4)$ a $(2,-6)$

c) $(-3,-33)$, $(2,-8)$ a $(4,-68)$

d) $(5,20)$, $(6,30)$ a $(11,110)$

Příklad 4: Proložte rovinu $ax + by + cz + d = 0$ body

a) $(2,4,4)$, $(3,4,3)$ a $(3,1,6)$

b) $(5,4,7)$, $(4,5,5)$ a $(2,2,6)$

Příklad 5: Určete souřadnice průsečíků trojic rovin $\alpha : x + y + z - 10 = 0$, $\beta : x + y - z - 4 = 0$, $\gamma : -x + y + z - 6 = 0$, $\delta : x - y + z - 8 = 0$ a to:

a) $\beta \cap \gamma \cap \delta$

b) $\alpha \cap \beta \cap \delta$

Příklad 6: Řešte úlohu nalezení rovnice kružnice obsahující danou trojici bodů $A = (2,1)$, $B = (4,3)$ a $C = (0,7)$ pomocí soustavy lineárních rovnic.

Příklad 7: Nalezněte alespoň jedno netriviální řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pro následující matici $\mathbf{A}$, pokud takové existuje.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

Příklad 8: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+\ x_3 &= \ 5 \\ 2x_1+3x_2+\ x_3 &= \ 1 \\ 2x_1+\ x_2+3x_3 &= 11 \\ 5x_1+5x_2+2x_3 &= \ 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -x_1-\ x_2+2x_3 \qquad\quad &= 1 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+3x_4 &= 1 \\ x_1+\ x_2-\ x_3+2x_4 &= 2 \\ -\ x_2+2x_3+2x_4 &= 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5 &= 2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-\ x_4+3x_5 &= 2 \\ x_1+\ x_2+3x_3-2x_4+3x_5 &= 1 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Příklad 9: Ukažte, že jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i $\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{x}' = (\alpha x_1+(1-\alpha)x'_1, \alpha x_2+(1-\alpha)x'_2, \ldots, \alpha x_n+(1-\alpha)x'_n)^T$ pro libovolné reálné číslo α. Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ dané soustavy.

Příklad 10: Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3 &= 1 \\ x_1-2x_2+\ x_3 &= 0 \\ 5x_1-9x_2+5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} -x_1+\ x_2-3x_3+4x_4 &= \ \ 1 \\ 2x_1-\ x_2+4x_3-7x_4 &= \ \ 0 \\ -x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4 &= -3 \\ -x_1+2x_2-5x_3+5x_4 &= \ \ 3 \end{aligned}$$

Příklad 11: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$